

1. feladat 15 pont

Számolja ki a határértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{x + \sin 2x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^x}{3} \right)^{1/x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

Megoldás:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{x + \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\rightarrow 0}}{1 + \underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{\rightarrow 0}} = 2$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^x}{3} \right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left(\ln \left(\frac{2 + e^x}{3} \right) \cdot \frac{1}{x} \right) = \sqrt[3]{e}, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \left(\frac{2 + e^x}{3} \right) \cdot \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2 + e^x}{3} \right)}{x} \stackrel{0/0 \text{ L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2 + e^x} \cdot \frac{e^x}{3}}{1} = \frac{1}{3}.$$

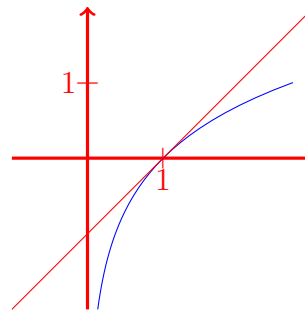
$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - x \ln x}{(x-1)x \ln x} \stackrel{\infty/\infty \text{ L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{x \ln x + (x-1) \ln x + (x-1)x \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln x}{(2x-1) \ln x + x-1} \stackrel{\infty/\infty \text{ L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x}}{2 \ln x + \frac{2x-1}{x} + 1} = -\frac{1}{2}$$

2. feladat 8 pontIgazolja, hogy $x - 1 \geq \ln x$ minden $x > 0$ esetén.Megoldás:

Az $x-1$ egyenletű egyenes éppen az $\ln x$ függvény $(1, 0)$ ponton átmenő érintője.

Mivel $\ln'' x = -\frac{1}{x^2} < 0$, ezért $\ln x$ konkáv, és így az érintő felette halad.



Megoldás: Ha $x \neq 1$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik ξ az x és 1 között, amire

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{\xi}, \text{ azaz } \xi \ln x = x - 1.$$

Ha $x > 1$, akkor $\xi > 1$ és $\ln x > 0$, ezért $(\xi - 1) \ln x > 0$, azaz $\xi \ln x > \ln x$.

Ha $x < 1$, akkor $\xi < 1$ és $\ln x < 0$, ezért $(\xi - 1) \ln x > 0$, azaz $\xi \ln x > \ln x$.

3. feladat**10 pont**

Számolja ki a következő integrálokat!

(a) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

(b) $\int \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{x^4} dx$

Megoldás:

(a) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = - \int (\cos x)^{-3} \cdot \cos' x dx = - \frac{(\cos x)^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$

(a) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}' x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + c$

(b) $\int \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{x^4} dx = \int \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^4} dx = \int \frac{1}{x} - 9x^{-2} + 26x^{-3} - 24x^{-4} dx = \ln |x| + 9x^{-1} - 13x^{-2} + 8x^{-3} + c = \ln |x| + \frac{9}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} + c$

4. feladat**9 pont**

Adja meg a tangens függvény 0 körüli másodrendű Taylor-polinomját!

Ennek felhasználásával adjon becslést $\operatorname{tg}(0.5)$ értékre!Adjon a becsléshez tartozó hibakorlátot! ($0.5 < \frac{\pi}{6}$)Milyen intervallumba esik ez alapján $\operatorname{tg}(0.5)$?**Megoldás:**

$\operatorname{tg} x \qquad \operatorname{tg} 0 = 0$

$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2} \qquad \operatorname{tg}' 0 = 1$

$\operatorname{tg}'' x = -2(\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \qquad \operatorname{tg}'' 0 = 0$

Ezért $T_2(x) = x$, így $\operatorname{tg} 0.5 \approx T_2(0.5) = 0.5$.

$$\exists \xi \in]0, 0.5[\subset]0, \frac{\pi}{6}[: |R_2(0.5)| = \frac{\operatorname{tg}'''(\xi)}{3!} 0.5^3 = \frac{2 \cos^4 \xi + 2 \sin^2 \xi \cdot 3 \cos^2 \xi}{48 \cos^6 \xi} = \frac{2 \cos^2 \xi + 6 \sin^2 \xi}{48 \cos^4 \xi} =$$

$$\frac{6 - 4 \cos^2 \xi}{48 \cos^4 \xi} < \frac{6 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{6}}{48 \cos^4 \frac{\pi}{6}} = \frac{6 - 4 \cdot \frac{3}{4}}{48 \cdot \frac{9}{16}} = \frac{1}{9}$$

$$\text{Így } \frac{7}{18} < \operatorname{tg} 0.5 < \frac{11}{18}$$

8 pont

Adja meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = x^3 + 12x - 24\ln(x+4)^2$ függvény szigorúan monoton növekszik!

Megoldás: $\text{Dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$$f'(x) = 3x^2 + 12 - \frac{48}{x+4} \stackrel{?}{=} 0 \quad / \cdot (x+4)$$

$$3x(x^2 + 4x + 4) = (3x^2 + 12)(x + 4) - 48 \stackrel{?}{=} 0$$

zérushelyek: $x_1 = 0$ és $x_{2,3} = -2$

	$]-\infty, -4[$	$]-4, -2[$	$]-2, 0[$	$]0, \infty[$	
f					lok. min.
f'	+	-	0	-	0

A legbővebb intervallumok, ahol az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekszik: $]-\infty, -4[$ és $]0, \infty[$.