

1. Sorok

1.1. Sorok összegének meghatározása

1. feladat (1.1. Sorok összegének meghatározása)

Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjuk meg a határértéküket!

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 + 2n}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2 + n}}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \arctg n - \arctg(n+1)$$

2. feladat* (1.1. Sorok összegének meghatározása)

Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjuk meg a határértéküket!

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$(e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^3 - n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

3. feladat (1.1. Sorok összegének meghatározása)

Konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 4^n + 5(-1)^n}{3^{2n}}$$

$$(e) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}}$$

$$(f) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} - (-2)^{k+2}}{5^k}$$

4. feladat* (1.1. Sorok összegének meghatározása)

Konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{2n_l}}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{4^n(1-i)^{2n}}$$

1.2. Kritériumok

1. feladat (1.2. Kritériumok)

Konvergensek-e az alábbi sorok? (majoráns és minoráns)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n} - 3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n - 3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n + 2^{n+1}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2} - 3}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^6 + 2n^2 - \sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 + n^3 + 1}{n^8 - n^2 + 3}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^7 + n^2 - n + 3}$

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 8n^2 + 1}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - n + 3}{2n^4 + 2n^2 + 7}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 3}{2n^5 + 2n^2 + 7}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$

2. feladat* (1.2. Kritériumok)

Konvergensek-e az alábbi sorok? (majoráns és minoráns)

(a) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 1} \right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

3. feladat* (1.2. Kritériumok)

Tegyük fel, hogy $0 < a_n$, $0 < b_n$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ teljesül minden n -re. Igazoljuk, hogy ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is az.

4. feladat (1.2. Kritériumok)

Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjunk közelítést a sorösszegre, legfeljebb 0.1-es pontossággal! (Leibniz)

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\lg n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n}{n^2 - 1}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-n}{n+1} \right)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + 1000}$

5. feladat (1.2. Kritériumok)

A gyökkritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 4^{n+1}}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$$

(e)
$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{9^n}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1}\right)^{n^2}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2} \frac{1}{3^{2n+1}}$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{n^3}$$

(j)
$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$$

(l)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log^n n}$$

6. feladat (1.2. Kritériumok)

A hányadoskritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

(d)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n-1)!}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n)^n}{(n+1)!}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{5^{3n} n! (n+1)! (n+2)!}$$

7. feladat (1.2. Kritériumok)

Konvergensek-e az alábbi sorok? (gyök és hányadoskritérium)

(a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1}\right)^n$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$$

(e)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

8. feladat* (1.2. Kritériumok)

Konvergensek-e az alábbi sorok? (gyök és hányadoskritérium)

(a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ ahol } a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{ha } n = 2k-1 \\ \frac{1}{3^n}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$$

1.3. Abszolút konvergens sorok

1. feladat (1.3. Abszolút konvergens sorok)

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek illetve feltételesen konvergensek-e.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \sqrt{n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+4)}{n^2+4}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n^2}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - 3n + 8}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n + n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-n}{4+n} \right)^n$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2 + n3^n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

2. feladat* (1.3. Abszolút konvergens sorok)

Feltételesen konvergensek-e az alábbi sorok?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n - \log n}$ sor?

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right)$

(c) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \dots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \dots$

(d) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} - \dots$

1.4. Részletösszeg hibája

1. feladat (1.4. Részletösszeg hibája)

Határozzuk meg az alábbi sorok értékét legfeljebb 10^{-3} hibával, amennyiben konvergensek!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1} \right)^n$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)! - n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n + 10^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(2n)!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$

2. feladat (1.4. Részletösszeg hibája)

Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget a 10. részletösszeggel közelítjük?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + \sqrt{2}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n} + n^2 + 3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n^2 + n}$

3. feladat (1.4. Részletösszeg hibája)

Becsüljük meg, hogy hányadik részletösszeg esetén lesz a sor összegére kapott becslés hibája 10^{-4} -nél kisebb!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{5^{2n} + 3n^2 + 1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n + 3}$

1.5. Általános feladatok

1. feladat* (1.5. Általános feladatok)

Legyen a_n konvergens sorozat. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2. feladat* (1.5. Általános feladatok)

Legyen a_n monoton csökkenő nullsorozat, melyre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

3. feladat* (1.5. Általános feladatok)

Legyen a_n nemnegatív tagú sorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k = 0$.

4. feladat (1.5. Általános feladatok)

Mutassuk meg, hogy ha az a_n konvergens sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ teljesül, akkor a $\sum_n \frac{a_n}{n}$ sor divergens.

5. feladat* (1.5. Általános feladatok)

Legyen a_n korlátos változású sorozat, azaz $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor az a_n sorozat konvergens.

6. feladat (1.5. Általános feladatok)

Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens. Mutassuk meg, hogy ekkor $\sum a_n^2$ konvergens.

Mutassuk meg, hogy $\sum a_n$ konvergenciája nem elég.

7. feladat* (1.5. Általános feladatok)

Legyen $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$, és tekintsük az $a : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $a_k = x^k$ sorozatot. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$(a) \quad \sum_{k=0}^n k x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1} n - \frac{x(x^n - 1)}{(x-1)^2}, \text{ valamint } \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2};$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^n k^2 x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1} n^2 - \frac{2x^{n+1}}{(x-1)^2} n + \frac{x(1+x)(x^n - 1)}{(x-1)^3}, \text{ valamint } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3};$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^n k^3 x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1} n^3 - \frac{3x^{n+1}}{(x-1)^2} n^2 + \frac{3x^{n+1}(x+1)}{(x+1)^3} n - \frac{x(x^2 + 4x + 1)(x^n - 1)}{(x-1)^4}, \text{ valamint } \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1-x)^4}$$

teljesül.

1.6. Sorok szorzata

1. feladat (1.6. Sorok szorzata)

Tekintsük az $a_n = n$ és $b_n = 1$ sorozatokat. Igazoljuk, hogy konvolúciójukra minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $(a * b)_n = \frac{n(n+1)}{2}$ teljesül.

2. feladat (1.6. Sorok szorzata)

Legyen $q \in]-1, 1[$ és $a_n = q^n$. Mutassuk meg, hogy $(a * a)_n = (n+1)q^n$ teljesül, és ennek segítségével igazoljuk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}$$

formulát.

3. feladat* (1.6. Sorok szorzata)

Legyen a_n korlátos változású zérussorozat (azaz $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < \infty$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$). Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n (-1)^n a_n$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|.$$

4. feladat (1.6. Sorok szorzata)

Igazoljuk, hogy a $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor konvergens, de önmagával vett Cauchy-szorzata már divergens.

5. feladat* (1.6. Sorok szorzata)

Legyen a_n korlátos változású komplex zérussorozat, és legyen $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan, hogy $|q| = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n a_n q^n$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \frac{2}{|1-q|}.$$

2. Többváltozós függvények

2.1. Vektorterek topológiája

1. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

Milyen normák léteznek $\mathbb{R}$ -en?

2. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

Legyen $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Mutassuk meg, hogy $|x - z| = |x - y| + |y - z|$ pontosan akkor, ha y az x -et és z -t összekötő szakaszon fekszik.

3. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

(a) Nyílt-e az $]1, 2[$ halmaz $\mathbb{R}$ -ben?

(b) Nyílt-e az $]1, 2[\times \{0\}$ halmaz $\mathbb{R}^2$ -ben?

(c) Zárt-e az $[1, \infty[$ halmaz $\mathbb{R}$ -ben?

(d) Zárt-e az $[1, \infty[\times \{0\}$ halmaz $\mathbb{R}^2$ -ben?

4. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

Vázlatosan ábrázoljuk az $\mathbb{R}^2$ alábbi részhalmazait, adjuk meg a belső, a torlódási, a határ és az izolált pontjaikat, valamint a lezártjukat és a belsejüket.

$$(a) \left\{ \left(\frac{-1}{n}, \frac{-1}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\} \cup]3, 4] \times \{0\} \quad (b) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y < x^2\}$$

$$(c) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\} \cup [-1, 0[\times \{0\}$$

$$(d) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = \sin \frac{1}{x}\} \quad (e) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < \sin \frac{1}{x}\}$$

5. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

Vizsgálja meg az adott térben az alábbi halmazokat nyíltság és korlátosság szempontjából!

$$(a) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, y = 0\} \quad (b) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1\}$$

$$(c) A = \mathbb{Q}^2 \quad (d) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(e) A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

6. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

Legyen

$$H \subset \mathbb{R}^2, \quad H := \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Határozzuk meg H torlódási pontjait $\mathbb{R}^2$ -ben.

7. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

Határozzuk meg az

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

halmaz belsejét, határát és lezártját!

8. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

Mutassuk meg, hogy bármely $H \subset \mathbb{R}^n$ esetén $\text{fr}(\text{fr } H) \subset \text{fr } H$. Mutassunk példát arra, amikor a tartalmazás valódi.

9. feladat* (2.1. Vektorterek topológiája)

Mutassuk meg, hogy minden $a \in \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon > 0$ esetén $\text{cl}(B_\varepsilon(a)) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq \varepsilon\}$.

Igaz-e ez tetszőleges normált térben? Igaz-e ez tetszőleges metrikus térben?

10. feladat* (2.1. Vektorterek topológiája)

Mutassuk meg, hogy minden $a \in \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon > 0$ esetén $B_\varepsilon(a)$ és $\text{cl}(B_\varepsilon(a))$ konvex.

11. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

Igazoljuk, hogy $\text{cl}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2$.

12. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

(a) Mutassuk meg, hogy bármely $A, B \subset \mathbb{R}^n$ esetén $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl } A \cup \text{cl } B$ és $\text{cl}(A \cap B) \subset \text{cl } A \cap \text{cl } B$. Adjunk példát szigorú tartalmazásra!

(b) Mutassuk meg, hogy bármely $A, B \subset \mathbb{R}^n$ esetén $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$ és $\text{int } A \cap \text{int } B \subset \text{int}(A \cup B)$. Adjunk példát szigorú tartalmazásra!

13. feladat* (2.1. Vektorterek topológiája)

Igazak-e az előző feladat állításai több részhalmaz esetén?

14. feladat (2.1. Vektorterek topológiája)

Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt. Bizonyítsuk be, hogy létezik $x \in A$, melyre $|x - a| = \inf \{|a - b| : b \in A\}$.

2.2. Sorozatok határértéke

1. feladat (2.2. Sorozatok határértéke)

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, ha létezik.

(a) $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $a_n = (\sqrt{n^2 + 1}, \frac{2n+3}{4n-1})$

(b) $b : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$, $b_n = \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \right)$

(c) $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $c_n = \left(\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)^n, \frac{n^2}{2^n} - \frac{n^3}{3^n i} \right)$

2. feladat (2.2. Sorozatok határértéke)

Tekintsük $\mathbb{R}^2$ -n a következő rekurzív sorozatot! $x_0 = (0, 0)$,

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + (2^{-n}, 0), & \text{ha } n \text{ páros,} \\ x_n + (0, 2^{-n}), & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy (x_n) konvergens. Mi a határértéke?

3. feladat (2.2. Sorozatok határértéke)

Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat korlátosság és konvergencia szempontjából!

(a) $x_n = ((-1)^n \frac{1}{n}, 1 + (-1)^n) \in \mathbb{R}^2$ (b) $x_n = \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}, \frac{1}{n^2}, (1 + \frac{1}{n})^2 \right) \in \mathbb{R}^3$

(c) $x_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \frac{5n^2+3n-1}{1-2n^2} \right) \in \mathbb{R}^3$, (d) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{n^2}{n+2}, \dots, \frac{n^{p-1}}{n+p-1} \right) \in \mathbb{R}^p$,

(e) $x_n = (n(\sqrt[n]{2} - 1), n(\sqrt[n+1]{2} - 1), \dots, n(\sqrt[n+p]{2} - 1)) \in \mathbb{R}^p$.

2.3. Folytonosság, határérték

1. feladat (2.3. Folytonosság, határérték)

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, értékkészletét. A szintvonalak illetve síkmetszetek vizsgálatával ábrázoljuk vázlatosan a függvényeket! (Ha van lehetőségünk, rajzoltassuk ki valamilyen programcsomag segítségével!)

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, (c) $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 3y^2$,

(d) $f(x, y) = y^2 - x^2$, (e) $f(x, y) = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}$.

2. feladat (2.3. Folytonosság, határérték)

Határozzuk meg az alábbi függvények szintfelületeit!

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2}$, (b) $f(x, y, z) = x + y^2 + z^2$,

(c) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

3. feladat (2.3. Folytonosság, határérték)

Határozzuk meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2},$ (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2},$ (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - 2y}{3x + y},$
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{2x^2 + 2y^2},$ (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5xy^3}{2x^2 + 2y^2},$ (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2},$
- (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + x - y}{xy + x + y},$ (h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1-0)} \frac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1 - y}},$ (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x - y^2},$
- (j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x^2 y}{x^2 \cos y^2},$ (k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2},$ (l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x},$
- (m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin 2y}{x^2 + y^2},$ (n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arcsin\left(\frac{x}{y}\right),$ (o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3x^2 + 4y^2) \arctan \frac{x}{y},$
- (p) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{e^{x^2 - 3y}}{1 + 2x^2 + 3y^2},$ (q) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^4 - y^4}{x^3 + y^3},$ (r) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + x^2 y)}{x^2 + y^2},$
- (s) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2},$ (t) $\lim_{x \rightarrow 3, y \rightarrow \infty} \frac{xy - 1}{y + 1},$
- (u) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y},$ $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y},$ $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

4. feladat (2.3. Folytonosság, határérték)

Vizsgáljuk meg az alábbi többváltozós függvényeket folytonosság szempontjából!

- (a)
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
- (b)
- $$f(x) = \begin{cases} (2x + 3y) \ln(x^2 + y^2), & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
- (c)
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
- (d)
- $$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & \text{ha } y \neq 0, \\ 0, & \text{ha } y = 0 \end{cases}$$
- (e) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ (f) $f(x, y) = \frac{x + y}{x^3 + y^3}$

5. feladat (2.3. Folytonosság, határérték)

Folytonos-e az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{xy}, & \text{ha } xy \neq 0, \\ 1, & \text{ha } xy = 0 \end{cases}$$

függvény a $(0, 0)$ pontban?

Folytonos-e f az $A = \{(x, y) : y = 2x\}$ halmazon? (Azaz folytonos-e az $f|_A$ függvény?)

Folytonos-e f a $B = \{(x, y) : y = -x\}$ halmazon?

6. feladat (2.3. Folytonosság, határérték)

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény, melyre teljesülnek az alábbiak:

- (a) $x \mapsto f(x, y_0)$ folytonos minden $y_0 \in \mathbb{R}$ esetén,
- (b) $y \mapsto f(x_0, y)$ folytonos minden $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén,
- (c) $f(K)$ kompakt minden $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt halmazra.

Mutassuk meg, hogy f folytonos.

Mutassunk példát rá, hogy az első két feltétel nem elég.

7. feladat (2.3. Folytonosság, határérték)

Adjunk példát olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallumra és $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos injektív függvényre, melynek az inverze nem folytonos.

3. Derivált

3.1. Parciális derivált

1. feladat (3.1. Parciális derivált)

Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeinek értelmezési tartományát és határozzuk meg a parciális deriváltfüggvényeket!

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3},$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

2. feladat (3.1. Parciális derivált)

Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltjait.

(a) $f(x, y, z) = \frac{x^2 + \cos y}{1 + e^z} + y^2 z$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

3. feladat (3.1. Parciális derivált)

Mutassuk meg, hogy az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

függvény nem folytonos az origóban, de itt léteznek a parciális deriváltjai.

4. feladat (3.1. Parciális derivált)

Mutassuk meg, hogy az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4+xy^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvényre $f''_{xy} \neq f''_{yx}$.

5. feladat (3.1. Parciális derivált)

Mutassuk meg, hogy az alábbi többváltozós függvények kielégítik az adott parciális differenciálegyenletet!

$$(a) \quad z(x, y) = e^{-ay} \cos ax, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$(b) \quad u(x, t) = \sin(x - at) + \ln(x + at), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$(c) \quad u(x, y) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

6. feladat (3.1. Parciális derivált)

Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

$$(a) \quad x \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg}(xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg}(xy)$$

$$(b) \quad \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} (xy e^{x+y}) = (i+x)(k+y) e^{x+y}, \quad i, k \in \mathbb{N}^+$$

$$(c) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) ((\sin x)(\sin y)) = 0$$

$$(d) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \right) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

3.2. Fréchet-derivált

1. feladat (3.2. Fréchet-derivált)

Hol deriválhatók az alábbi függvények? Adjuk meg a deriváltat is!

(a)

$$f(x, y) = \sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2} + 6x + 3y, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(d)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(e)

$$f(x, y) = \begin{cases} x^{4/3} \sin(y/x), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

2. feladat (3.2. Fréchet-derivált)

Adjuk meg a következő függvények Jacobi-mátrixát (deriváltmátrixát)!

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (e^x, x^2 + y^2, \sin e^{xy^3})$

(b) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z, w) \mapsto (e^{xy^2z}w, \arctg x^w)$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{r} \mapsto \text{grad } \ln |\mathbf{r}|$

3. feladat (3.2. Fréchet-derivált)

Igazoljuk, hogy a vektorok vektoriális szorzása, mint $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény, differenciálható! Mi a deriváltja?

3.3. Iránymenti derivált

1. feladat (3.3. Iránymenti derivált)

Határozzuk meg, az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorral párhuzamos iránymenti deriváltját az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ pontban az iránymenti derivált definíciója alapján, valamint az f függvény $\mathbf{a}$ pontbeli deriváltjának a segítségével. (Használjuk fel azt a tényt, hogy az alábbi függvények differenciálhatók.)

(a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \mathbf{v} = (1, 3), \mathbf{a} = (1, 1).$

(b) $f(x, y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}}, \mathbf{v} = (-1, 1), \mathbf{a} = (-1, 1).$

2. feladat (3.3. Iránymenti derivált)

Tekintsük az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + 3xy + y^3 \\ 1 + xy^2 + x^2 \end{bmatrix}$ differenciálható függvényt és legyen

$\mathbf{a} = (2, 1)$, valamint $\mathbf{u} \parallel (3, -1)$. Számoljuk ki a $\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{u}}$ mennyiségeket.

3. feladat (3.3. Iránymenti derivált)

Határozzuk meg azon pontok összességét, amelyekben az

$$f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

függvény tetszőleges irányban vett iránymenti deriváltjának a hossza kisebb, mint $1/3$.

4. feladat (3.3. Iránymenti derivált)

Határozzuk meg, hogy mely $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ egységvektorhoz tartozik az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény legnagyobb iránymenti deriváltja az $a \in \mathbb{R}^2$ pontban, ha

$$(a) \ f(x, y) = x^2 - xy + y^2 \text{ és } a = (1, 1); \quad (b) \ f(x, y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}} \text{ és } a = (-1, 1).$$

3.4. Egyéb deriválási feladatok

1. feladat (3.4. Egyéb deriválási feladatok)

Határozzuk meg az alábbi parciális deriváltakat!

- (a) $f(x, y) = 3xy$, $x = \sin(u + v)$, $y = \cos(u + v)$, $f'_u = ?$, $f'_v = ?$,
- (b) $f(x, y) = \arcsin xy$, $x = we^{uv}$, $y = 2u - 3vw$, $f'_u = ?$, $f'_v = ?$, $f'_w = ?$,
- (c) $f(x, y) = \arcsin(xy)$, $x = we^{uv}$, $y = 2u - 3wv$, $f'_u = ?$, $f'_v = ?$.

2. feladat (3.4. Egyéb deriválási feladatok)

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = \left(t^2 - t, \frac{1}{1+t^2}, e^t\right)$ és $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = x^2y - z$. Használjuk fel, hogy f és g differenciálható.

- (a) Határozzuk meg a $g \circ f$ függvény deriváltját a $t_0 = 1$ pontban az összetett függvény deriválási szabálya alapján.
- (b) Határozzuk meg a $f \circ g$ függvény deriváltját a $a_0 = (2, 3, 11)$ pontban a közvetett függvény deriválási szabálya alapján.

3. feladat (3.4. Egyéb deriválási feladatok)

Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ és tekintsük az alábbi $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, 6$) függvényeket.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f_1(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq \mathbf{a}, \\ 0, & \text{ha } (x, y) = \mathbf{a}. \end{cases} & \text{(b)} \quad f_2(x, y) &= \begin{cases} x^2 y^2 \arctg\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f_3(x, y) &= \sqrt{2x^2 + 3y^2} & \text{(d)} \quad f_4(x, y) &= \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & \text{ha } (x, y) \neq \mathbf{a}, \\ 1, & \text{ha } (x, y) = \mathbf{a}. \end{cases} \\ \text{(e)} \quad f_5(x, y) &= \begin{cases} x^3 y^4 \sin \frac{1}{y}, & \text{ha } y \neq 0, \\ 0, & \text{ha } y = 0. \end{cases} & \text{(f)} \quad f_6(x, y) &= \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } y \neq 0, \\ 0, & \text{ha } y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- (a) Igazoljuk, hogy az f_1 függvénynek minden pontban létezik parciális deriváltja, azonban a parciális deriváltak nem folytonosak az $\mathbf{a}$ pontban, valamint f_1 nem differenciálható az $\mathbf{a}$ pontban.
- (b) Igazoljuk, hogy az f_2 függvény folytonosan differenciálható az $\mathbf{a}$ pontban.
- (c) Igazoljuk, hogy az f_3 függvénynek nem létezik a parciális deriváltja az $\mathbf{a}$ pontban.
- (d) Igazoljuk, hogy az f_4 függvény folytonosan differenciálható az $\mathbf{a}$ pontban.
- (e) Igazoljuk, hogy az f_5 függvény folytonosan differenciálható az $\mathbf{a}$ pontban.
- (f) Igazoljuk, hogy az f_6 függvénynek létezik mindenhol parciális deriváltja, a parciális derivált nem folytonos az $\mathbf{a}$ pontban, azonban f_6 differenciálható az $\mathbf{a}$ pontban.

3.5. Érintő

1. feladat (3.5. Érintő)

Adjuk meg az alábbi függvények P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét, illetve a $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos iránymenti deriváltat P_0 -ban!

- (a) $f(x, y) = 3y + e^{xy^2} - 2y \arctan \frac{x}{y}$, $P_0 = (0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1)$
- (b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ -3, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, $P_0 = (-1, 1)$, $\mathbf{v} = (-5, 1)$
- (c) $f(x, y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}}$, $P_0 = (-\frac{1}{2}, 1)$. Keressük meg a maximális és minimális értékű iránymenti deriváltat P_0 -ban!

2. feladat (3.5. Érintő)

Határozzuk meg az $xyz = 1$ felületnek az $x + y + z = 3$ síkkal párhuzamos érintősíkját!

3. feladat (3.5. Érintő)

Igazoljuk, hogy az $xyz = a^3$, ($a > 0$) felület érintősíkjai a koordinátságokkal állandó térfogatú tetraédereket alkotnak!

4. feladat (3.5. Érintő)

Írjuk fel az $xyz = 1$ felület $x + y + z = 6$ síkkal párhuzamos érintősíkjainak az egyenletét.

5. feladat* (3.5. Érintő)

Tekintsük az $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x, y, z\}$ térrészben (amelynek neve *pozitív ortáns*) a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

felületet, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy a felület érintősíkjai a koordinátatengelyekből a összegű darabokat vágnak le. (Azaz, ha az érintősík az x' , y' és z' helyen metszi a koordinátatengelyeket, akkor $x' + y' + z' = a$.)

6. feladat (3.5. Érintő)

Legyen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy a

$$h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

függvény érintősíkjai átmennek az origón.

3.6. Szélsőérték

1. feladat (3.6. Szélsőérték)

Keressük meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit (ahol $k \in \mathbb{R}$).

(a) $f(x, y) = (x - 2y)e^{-x^2 - y^2}$

(b) $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$

(c) $f(x, y) = kx^2 + xy + y^2 + 3x - 3y$

(d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 6x + 2z$

(e) $f(x, y) = e^{3x^2} + y^2$

(f) $f(x, y) = \operatorname{ch}(x^2 + y^2)$

(g) $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$

2. feladat* (3.6. Szélsőérték)

Legyen $n \geq 2$, valamint $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Definiáljuk a $\mathbf{q} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ vektort, és tegyük fel, hogy a $\mathbf{q}$ és az $\mathbf{x}$ vektor lineárisan független. Vezessük be az alábbi jelöléseket.

$$\mathbb{E}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \mathbb{E}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \mathbb{E}(xy) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \mathbb{E}(x^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Igazoljuk, hogy a

$$Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\alpha, \beta) \mapsto \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta - y_i)^2$$

függvénynek az

$$\alpha_0 = \frac{\mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y)}{\mathbb{E}(x^2) - (\mathbb{E}(x))^2} \quad \beta_0 = \frac{\mathbb{E}(x^2)\mathbb{E}(y) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(xy)}{\mathbb{E}(x^2) - (\mathbb{E}(x))^2}$$

pontban van lokális minimuma.

3. feladat (3.6. Szélsőérték)

Keressük meg az f függvény szélsőértékeit a T halmazon, ahol

- (a) $f(x, y) = (y + 2x - 4)^2 + (x + y)^2$ és $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}$.
- (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$, $T = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 9 - x\}$
- (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$, $T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$
- (d) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $T = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$
- (e) $f(x, y) = x^3 + y^3 + x + y$ és $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$;
- (f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$, $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$
- (g) $f(x, y) = x^2y(2 - x - y)$ és $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 6\}$;
- (h) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (i) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2$ és $T = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;
- (j) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$ és $T = [0, \pi]^3$;

4. feladat (3.6. Szélsőérték)

Határozzuk meg az f függvény feltételes szélsőértékeit a megadott feltételek mellett!

- (a) $f(x, y) = xy$, $x^2 + y^2 = 1$
- (b) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, $x - y = \frac{\pi}{4}$.
- (c) $f(x, y, z) = xyz$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$
- (d) $f(x, y) = x + 2y + 3z$, $x^2 + y^2 = 2$ és $y + z = 1$.

5. feladat* (3.6. Szélsőérték)

Keressük meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit a megadott feltételek mellett.

- (a) Legyen $f(x, y) = xy$, az $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq x, y$ feltétel mellett.
- (b) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$ és $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$ a $\prod_{k=1}^n x_k = a$ és az $x_1, \dots, x_n > 0$ feltétellel.

3.7. Szöveges feladatok

1. feladat (3.7. Szöveges feladatok)

Egy adott ponton áthaladó síkok közül melyik van legmesszebb az origótól?

2. feladat* (3.7. Szöveges feladatok)

(Euklidesz legkisebb terület problémája.) Tekintsük a síkon a BAC hegyes szögtartományt (a szög csúcsa A -nál van) és vegyünk fel a szögtartományban egy tetszőleges P pontot. Fektessünk egyenest a P ponton keresztül, úgy, hogy az elmetszi a szögszárakat a T_1 illetve T_2 pontokban. Hogyan válasszuk meg az adott egyenest, hogy az AT_1T_2 háromszög területe minimális legyen?

3. feladat* (3.7. Szöveges feladatok)

Tegyük fel, hogy egy edény 10 ml kénsavat tartalmaz kezdetben. Rendelkezésünkre áll 1 l víz, hogy csökkentjük a kénsav mennyiségét oly módon, hogy valamennyi vizet öntünk az edénybe, az teljesen elkeveredik a kénsavval, majd kiöntés után marad mindig 10 ml folyadék az edényben, és ezt a lépést ismételtjük addig, amíg a rendelkezésünkre álló 1 l víz el nem fogy. Mennyi kénsav fog biztosan maradni az edényben, akármilyen módon is használjuk fel az 1 l vizet?

4. feladat (3.7. Szöveges feladatok)

Felül nyitott téglatest alakú, V térfogatú tartályt szeretnénk készíteni. Mekkora legyenek a tartály élei, hogy az elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk?

5. feladat (3.7. Szöveges feladatok)

Keresük meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ gömbön azon pontokat, melyek távolsága a $P(1, 2, 2)$ ponttól a legnagyobb, illetve legkisebb!

6. feladat* (3.7. Szöveges feladatok)

Legfeljebb mekkora térfogatú téglatest fér bele az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenletű ellipszoidba? (Feltehetjük, hogy a téglatest élei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel!)

7. feladat* (3.7. Szöveges feladatok)

Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis közrezárja az $x^2 + y^2 = 2y$ kört. Hogyan válasszuk meg a -t és b -t, hogy az ellipszis területe minimális legyen?

8. feladat (3.7. Szöveges feladatok)

Az $xyz^2 = 1$ felület érintősíkjai közül melyik van a legközelebb az origóhoz?

9. feladat* (3.7. Szöveges feladatok)

Tengerbiológusok megállapították, hogy ha megérzik a vér jelenlétét, cápák abban az irányba kezdenek úszni, amerre a vér koncentrációja a leggyorsabban nő. A víz felszínén a $P(x, y)$ pontban legyen a vér koncentrációja

$$C(x, y) = e^{-\frac{x^2 + 2y^2}{10^4}}.$$

Tegyük fel, hogy a cápa az (x_0, y_0) pontban érzékeli először a vér jelenlétét. Írjunk fel egy egyenletet arra nézve, hogy milyen úton fog a cápa úszni.

10. feladat (3.7. Szöveges feladatok)

Egy a, b oldalú téglalapot 2 az oldalakkal párhuzamos egyenessel 4 téglalapra vágunk. Vegyük a két kisebb területű téglalap területének négyzetösszegét. Mennyi ennek a minimuma, illetve maximuma?

11. feladat (3.7. Szöveges feladatok)

Valamely y fizikai mennyiség feltételezésünk szerint egyenesen arányos egy másik x mennyiséggel, azaz $y = Ax + B$. A két mennyiség értékére n mérést végzünk, azaz rendelkezésünkre állnak az $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mérési adatok. Hogyan válasszuk meg A -t és B -t, hogy az $y = Ax + B$ egyenes a legközelebb fektessen a mért pontokhoz, amin azt értjük, hogy az

$$f(A, B) = \sum_{i=1}^n (y_i - (Ax_i + B))^2$$

kifejezés minimális legyen? (Ezt hívják legkisebb négyzetek módszerének.)

12. feladat (3.7. Szöveges feladatok)

Egy 1000 cm^3 térfogatú téglatest alakú ékszertartó ládikát szeretnénk ajándékozni a kedvesünknek. Megnyugtató anyagi helyzetünknek köszönhetően, az alját bronzból (melynek értéke 5000 Ft/cm^2), oldalait ezüstből (melynek értéke 8000 Ft/cm^2), fedelét aranyból (melynek értéke 20000 Ft/cm^2) készítjük. Hogyan válasszuk meg a dobozka méreteit, ha költségünket vonzalmunk dacára minimalizálni szeretnénk?

13. feladat* (3.7. Szöveges feladatok)

Keressük meg az $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ ellipszis azon pontját, melybe húzott érintőegyenes a legtávolabb van az origótól!

14. feladat (3.7. Szöveges feladatok)

Bizonyítsuk be, hogy, ha $x, y \geq 0$, akkor

$$\frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2}.$$

15. feladat (3.7. Szöveges feladatok)

Keressük meg az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ellipszisbe írható legnagyobb területű téglalapot! (Feltéhetjük, hogy a téglalap oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.)

3.8. Differenciál, Taylor-polinom**1. feladat (3.8. Differenciál, Taylor-polinom)**

Határozzuk meg az alábbi függvények kért differenciáljait!

$$(a) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, df = ?, d^2f = ? \quad (b) f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, df = ?, d^2f = ?$$

$$(c) f(x, y) = x \ln(xy), df = ?, d^2f = ?, d^3f = ?$$

2. feladat (3.8. Differenciál, Taylor-polinom)

Határozzuk meg az alábbi kifejezésekben α értékét úgy, hogy teljes differenciálokat kapjunk!

$$(a) xydx + \alpha x^2dy$$

$$(b) e^{-x}ydx + \alpha e^{-x}dy,$$

$$(c) \frac{1}{1 + (x - y)^2}dx + \frac{\alpha}{1 + (x - y)^2}dy$$

3. feladat (3.8. Differenciál, Taylor-polinom)

Mutassuk meg, hogy az

$$(a) f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ függvény } P = (0, 0) \text{ bázispontú másodrendű Taylor-polinomja a } \mathbf{h} = (a, b) \text{ helyen}$$

$$T_{2,P}^f(\mathbf{h}) = 1 - \frac{a^2 + b^2}{2};$$

$$(b) f(x, y, z) = \frac{xy}{z} \text{ függvény } P = (1, 1, 1) \text{ bázispontú másodrendű Taylor-polinomja a } \mathbf{h} = (a, b, c) \text{ helyen}$$

$$T_{3,P}^f(\mathbf{h}) = 1 + (a + b - c - 1) + \frac{1}{2}(2c^2 + 2ab - 2ac - bc - b - c + 1).$$

4. feladat (3.8. Differenciál, Taylor-polinom)

Írjuk fel az alábbi f függvények $P_0 = (x_0, y_0)$ ponthoz tartozó $T_n(x, y)$ n -edrendű Taylor-polinomját!

$$(a) f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5, P_0 = (1, -2), T_2(x, y) = ?$$

$$(b) f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, P_0 = (0, 0), T_2(x, y) = ?$$

$$(c) f(x, y) = \frac{x}{y}, P_0 = (1, 1), T_3(x, y) = ?$$

5. feladat (3.8. Differenciál, Taylor-polinom)

Egy gömb átmérőjét 10 cm-nek mérjük. A mérés pontossága ± 0.1 mm. Becsüljük meg a gömbtérfogat számított értékének pontosságát!

6. feladat (3.8. Differenciál, Taylor-polinom)

Az R_1, R_2, R_3 ellenállásokat párhuzamosan kötve, az eredő ellenállás R értékére

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Az ellenállások értékére rendre 25Ω , 40Ω , 50Ω értékeket mérünk legfeljebb 0.5% hibával. Mekkora a maximális hiba R számított értékére? Melyik ellenállás megváltozására a legérzékenyebb az eredő ellenállás?

7. feladat* (3.8. Differenciál, Taylor-polinom)

A P nyomású, V térfogatú, T hőmérsékletű ideális gázokat jól írja le a $PV = 8.31T$ egyenlet, ahol a nyomást kilopascal-ban (kPa), a térfogatot literben (l), a hőmérsékletet Kelvinben (K) adjuk meg. Hogyan változik meg közelítően a gáz nyomása, ha a térfogatot 12 l-ről 12.3 l-re növeljük, miközben a hőmérsékletet 310 K-ről, 305 K-re csökkentjük?

3.9. Inverzfüggvény tétel

1. feladat (3.9. Inverzfüggvény tétel)

Mutassuk meg, hogy az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvények az értelmezési tartományuk bármely pontja körül lokálisan invertálhatóak! Határozzuk meg a lokális inverzek elsőrendű közelítését a $\mathbf{a} = f(\mathbf{a})$ pont körül!

(a)

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (2, 3)$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x + x \sin y \\ e^x - x \cos y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (1, 1)$$

(c)

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \cos \frac{y}{x} \\ x \sin \frac{y}{x} \end{pmatrix}, \quad (x > 0, y \in \mathbb{R}), \quad \mathbf{a} = (1, 0).$$

2. feladat (3.9. Inverzfüggvény tétel)

Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^3, y^3)$ függvény invertálható az origó egy környezetében, de az $f'(0, 0)$ mátrix nem invertálható. Deriválható-e az inverz az origóban?

3. feladat (3.9. Inverzfüggvény tétel)

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$.

(a) Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható.

(b) Legyen $g = f^{-1}$. Igazoljuk, hogy $g'(0) = 1$ és $g'(10) = \frac{1}{13}$.

4. feladat (3.9. Inverzfüggvény tétel)

Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (u, v) \mapsto (u^3 + uv + v^3, u^2 - v^2).$$

(a) Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható az $(1, 1)$ pont egy U környezetében!

(b) Legyen $g = (f|_U)^{-1}$. Határozzuk meg a $g'(3, 0)$ mátrixot!

5. feladat (3.9. Inverzfüggvény tétel)

Legyen

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x^3y + xz^2, x^3 + x^2 - yz, x^2 + z^2 - xyz).$$

- (a) Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható az $(1, 1, 1)$ pont egy U környezetében!
(b) Legyen $g = (f|_U)^{-1}$. Határozzuk meg a $g'(2, 1, 1)$ mátrixot!

3.10. Implicitfüggvény-tétel

1. feladat (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

Megoldható-e az

$$\begin{aligned} 3x^2 - yz &= 0 \\ 3x^2 - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer az y, z ismeretlenekre az $x = 1$ pont egy környezetében? Ha igen, adjuk meg a megoldás egy elsőrendű közelítését az adott pont egy környezetében!

2. feladat (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

Mutassuk meg, hogy az

$$\begin{aligned} 3x + y - z - u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer

- (a) megoldható az x, y, u ismeretlenekre a z függvényében;
(b) megoldható az x, z, u ismeretlenekre az y függvényében;
(c) megoldható az x, z, u ismeretlenekre az u függvényében;
(d) nem oldható meg az x, y, z ismeretlenekre az u függvényében.

3. feladat (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

Igazoljuk, hogy létezik olyan folytonosan differenciálható $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, mely a 0 pont egy környezetében van értelmezve és eleget tesz az

$$e^{x+y(x)} - 2 \cos y(x) + 1 = 0$$

egyenlőségnek. Adjuk meg $y'(0)$ -t!

4. feladat (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

Mutassuk meg, hogy az $y_0 = 0$ pontnak létezik olyan B környezete, hogy minden $y \in B$ esetén az

$$\ln \sqrt{x + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

egyenletnek pontosan egy megoldása van.

5. feladat (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

Legyen $F(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} + e^{xz} - z - \frac{\pi}{4}$, és $F(0, 1, 1) = 0$. Igazoljuk, hogy az $F(x, y, z) = 0$ az $(x, y) = (0, 1)$ pont környezetében differenciálható $z(x, y)$ függvényt határoz meg. Adjuk meg $z'_x(0, 1)$ és $z'_y(0, 1)$ értékét!

6. feladat* (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

A termodinamikában az ideális gáz T hőmérséklete, p nyomása és V térfogata közötti összefüggést a $pV = RT$ egyenlet írja le, ahol $R = 8,314 J/K \cdot mol$ az un. Avogadro-szám. A reális gázoknak jobb leírását adja az un. Dieterici-egyenlet, mely szerint:

$$f(p, T, V) = p(V - b)e^{\frac{a}{RV^2T}} - RT = 0,$$

ahol a és b a gázra jellemző állandók. Adjuk meg a V'_T deriváltat!

7. feladat (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

Igazoljuk hogy az $y^2x + y^3 = 1$ egyenlet egy $y(x)$ függvénykapcsolatot határoz meg az $x_0 = 0$ pont egy környezetében! Számoljuk ki $y'(0)$ értékét!

8. feladat (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

Igazoljuk, hogy az

$$x \cos y^2 + \frac{2y}{x+2} + y = 2x$$

egyenletnek létezik olyan $x \mapsto y(x)$ implicit függvénye, mely áthalad a $(0, 0)$ ponton, valamint írjuk fel ennek az $x \mapsto y(x)$ függvénynek a $(0, 0)$ pontbeli érintőegyenese az egyenletét!

9. feladat (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

Igazoljuk, hogy az

$$y + x^2 \sin y + \sin x = 1$$

egyenletnek létezik olyan $x \mapsto y(x)$ implicit függvénye, mely áthalad a $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ponton. Milyen lokális tulajdonsága van az implicit módon adott $x \mapsto y(x)$ függvénynek a $(\frac{\pi}{2}, 0)$ pontban?

10. feladat (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

Igazoljuk hogy az $xy - 2e^{x-y} - 2z + e^z = 0$ egyenlet egyértelműen meghatároz az $(x_0, y_0) = (1, 1)$ pont egy környezetében egy olyan $z(x, y)$ függvénykapcsolatot, melyre $z(1, 1) = 0$ teljesül. Számoljuk ki $z'_x(1, 1)$ és $z'_y(1, 1)$ értékét!

11. feladat (3.10. Implicitfüggvény-tétel)

Tekintsük az

$$\begin{aligned} x^2u + yz^2v + v^3 &= 4 \\ x^4y^2uv &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer. Legyen $a = (1, 2, -1)$ és $b = (1, 1)$. (Ekkor az $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = -1, u_0 = 1$ és $v_0 = 1$ számokra teljesül a fenti egyenletrendszer.) Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt környezete az a pontnak és olyan $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény, melyre $\varphi(a) = b$ és minden $(x, y, z) \in \Omega$ esetén az $u = \varphi_1(x, y, z)$ és a $v = \varphi_2(x, y, z)$ számokra teljesül a fenti egyenletrendszer! Igazoljuk továbbá, hogy

$$(D\varphi)(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

teljesül!

3.11. Differenciáloperátorok

1. feladat (3.11. Differenciáloperátorok)

Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket, ahol r az $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény, $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^3$!

- | | | |
|--|---------------------------------|-------------------------------|
| (a) $\text{grad} \log r ^3$ | (b) $\text{grad} r ^5$ | (c) $\text{grad}f(r)$ |
| (d) $\text{div}(r \cdot \text{grad} \log r ^3)$ | (e) $\text{divgrad} r ^5$ | (f) $\text{divgrad}f(r)$ |
| (g) $\text{rot}(a \times r)$ | (h) $\text{rot}(r ^2 \cdot a)$ | (i) $\text{rot}(r \cdot a)$ |

2. feladat (3.11. Differenciáloperátorok)

Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

- (a) Ha $U_1, U_2 \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned}\text{grad}(U_1 + U_2) &= \text{grad}U_1 + \text{grad}U_2 \\ \text{grad}(cU_1) &= c\text{grad}U_1 \\ \text{grad}(U_1U_2) &= U_1\text{grad}U_2 + U_2\text{grad}U_1.\end{aligned}$$

- (b) Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned}\text{div}(V_1 + V_2) &= \text{div}V_1 + \text{div}V_2 \\ \text{div}(cV_1) &= c\text{div}V_1 \\ \text{div}(UV_1) &= U\text{div}V_1 + \langle V_1, \text{grad}U \rangle.\end{aligned}$$

- (c) Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned}\text{rot}(V_1 + V_2) &= \text{rot}V_1 + \text{rot}V_2 \\ \text{rot}(cV_1) &= c\text{rot}V_1 \\ \text{rot}(UV_1) &= U\text{rot}V_1 + (\text{grad}U) \times V_1.\end{aligned}$$

3. feladat* (3.11. Differenciáloperátorok)

Laplace-operátor polárkoordinátákkal.

Legyen $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$ és $H = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, valamint a polárkoordinátázás legyen $P : H \rightarrow G$, $P(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$!

- (a) Igazoljuk, hogy P differenciálható!

- (b) Mutassuk meg, hogy $Q : G \rightarrow H$, $Q(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \text{sgn } y \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ a P inverze, valamint, hogy Q differenciálható.

- (c) Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f \circ Q)(x, y)}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(f \circ Q)(x, y)}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi}!\end{aligned}$$

- (d) Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor

$$(\Delta f)(r, \varphi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] f(r, \varphi)!$$

4. feladat* (3.11. Differenciáloperátorok)

Laplace-operátor gömbi koordinátákkal.

Legyen $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0\}$ és $H = \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$, valamint a gömbi koordinátázás legyen $P : H \rightarrow G$, $P(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$.

(a) Igazoljuk, hogy P differenciálható.

(b) Mutassuk meg, hogy $Q : G \rightarrow H$,

$$Q(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (\operatorname{sgn} y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

a P inverze, valamint, hogy Q differenciálható.

(c) Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ Q)(x, y, z)}{\partial x} &= \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial f(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r} \frac{\partial f(r, \varphi, \varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f(r, \varphi, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(f \circ Q)(x, y, z)}{\partial y} &= \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial f(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r} \frac{\partial f(r, \varphi, \varphi)}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f(r, \varphi, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(f \circ Q)(x, y, z)}{\partial z} &= \cos \vartheta \frac{\partial f(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial f(r, \varphi, \varphi)}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

(d) Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor

$$(\Delta f)(r, \vartheta, \varphi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] f(r, \vartheta, \varphi).$$

5. feladat* (3.11. Differenciáloperátorok)

Mutassuk meg, hogy a Laplace-egyenlet invariáns az inverzióra. Legyen $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \mathbb{R})$, amit gömbi koordinátarendszerben $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ alakban írunk fel. Igazoljuk, hogy ha $\Delta \Phi = 0$, akkor a $\Psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{R}{r} \Phi(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi)$ függvényre is teljesül a $\Delta \Psi = 0$ egyenlet, tetszőleges $R \in \mathbb{R}^+$ paraméter mellett.

4. Integrál

4.1. Kettős integrál

1. feladat (4.1. Kettős integrál)

Számítsuk ki az alábbi kettős integrálokat a megadott tartományon!

(a) $\iint_T \frac{1}{1+x^2} dT$, ahol T a $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$ csúcspontú háromszög.

(b) $\iint_T \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} dT$, ahol T az első síknegyedbe eső, az $y = x^2, y=4, x=0$ görbék által határolt korlátos tartomány.

(c) $\iint_T \frac{x^2}{y^2} dT$, ahol a T halmaz az $x=2, y=x$ és az $y=\frac{1}{x}$ görbék által határolt korlátos tartomány

2. feladat (4.1. Kettős integrál)

Cserélje meg az integrálás sorrendjét!

$$(a) \int_1^2 \int_{\frac{y}{2}}^{4-\frac{y}{2}} f(x, y) \, dx \, dy$$

$$(b) \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy$$

$$(c) \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) \, dy \, dx$$

3. feladat (4.1. Kettős integrál)

Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$(a) \int_0^1 \int_{y^2}^1 y e^{-x^2} \, dx \, dy$$

$$(b) \int_0^1 \int_x^1 \frac{x \sin y}{y} \, dy \, dx$$

$$(c) \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \, dx \, dy$$

$$(d) \int_0^1 \int_{y^{\frac{2}{3}}}^1 y \cos(x^2) \, dx \, dy$$

$$(e) \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} \, dy \, dx$$

$$(f) \int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin(x^2) \, dx \, dy$$

4.2. Hármass integrál

1. feladat (4.2. Hármass integrál)

Számítsuk ki az alábbi integrálokat a megadott tartományon!

$$(a) \iiint_V e^{x+y+z} \, dV, \text{ ahol } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x+y, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

$$(b) \iiint_V \frac{dV}{(1+x+y+z)^3}, \text{ ahol } V \text{ az } x+y+z=1, x=0, y=0 \text{ és } z=0 \text{ síkokkal határolt}$$

korlátos térrész.

$$(c) \iiint_V xy^2z^3 \, dV, \text{ ahol } V \text{ a } z=xy, y=x, x=1 \text{ és a } z=0 \text{ egyenletek által meghatározott}$$

korlátos tartomány

2. feladat (4.2. Hármass integrál)

Cserélje meg az integrálás sorrendjét!

$$(a) \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^1 f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx + \int_0^1 \int_{x^2}^{x^2+1} \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$$

4.3. Integráltranszformációk

1. feladat (4.3. Integráltranszformációk)

Számítsuk ki az alábbi kettős integrálokat a megadott tartományon!

(a) $\iint_T x \, dT$, ahol T az $5x + 3y = 4$, $5x + 3y = 9$, $y = 2x$, $y = 5x$ egyenesek által közrezárt korlátos tartomány.

(b) $\iint_T x^2 + y^2 \, dT$, ahol T az $x^2 - y^2 = 1$, az $x^2 - y^2 = 9$, az $y = 1/2x$ és az $y = 2/x$ görbék által határolt első síknegyedbe eső korlátos tartomány!

(c) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} dx \, dy$

(d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

(e) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} x^2 + y^2 \, dy \, dx$

(f) $\iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0} \frac{x-y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$

(g) $\iint_T xy \, dT$, ahol T az $(x-1)^2 + y^2 = 1$ és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ körök által határolt korlátos síkrész.

(h) $\iint_T x^3 - 3xy^2 \, dT$, ahol $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x+1)^2 + y^2 \leq 9, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$

(i) $\iint_T xy^2 \, dT$, ahol $T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 1-x\}$.

(j) $\iint_T xy \, dT$, ahol $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 \geq 1, (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$

(k) $\iint_T \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \, dT$, ahol $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1/2\}$

(l) $\iint_T e^{-x^2-y^2} \, dT$, ahol $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

(m) $\iint_T x^2 y \, dT$, ahol $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x, 0 \leq y\}$

(n) $\iint_T \frac{1}{1 + \sqrt{9x^2 + \frac{y^2}{4}}} \, dT$, ahol $T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | 9x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0 \right\}$

(o) Milyen arányban osztja ketté az $y^2 = 2x$ parabola az $x^2 + y^2 = 8$ kör területét?

2. feladat (4.3. Integráltranszformációk)

Mekkora a T tartomány területe?

- (a) $R > 0$ és $d \in [0, 2R]$. $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, (x - d)^2 + y^2 \leq R^2\}$
- (b) $a, b > 0$. $T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$
- (c) T a sík azon pontjainak a halmaza, melyek (r, φ) polárkoordinátáira $0 \leq \varphi \leq \pi$ és $0 \leq r \leq 2 + 2 \sin \varphi$ teljesül.
- (d) T az $x^2 = ay$, az $x^2 = by$, az $x^3 = cy^2$ illetve az $x^3 = dy^2$ görbék által határolt korlátos síktartomány, ahol $0 < a < b$ és $0 < c < d$.

3. feladat (4.3. Integráltranszformációk)

Számítsuk ki az alábbi integrálokat a megadott tartományon!

- (a) $\iiint_V dV$, ahol $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.
- (b) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, ahol V az $x^2 + y^2 + z^2 = z$ felülettel határolt tartomány.
- (c) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^1 z \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx$
- (d) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dV$, ahol V a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 1$ felületekkel határolt korlátos tartomány
- (e) $\iiint_V xyz dV$, ahol V az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ és az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány
- (f) $\iiint_V 2z dV$, ahol V a $z \geq 2$ és a $z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány
- (g) $\iiint_V xyz dV$, ahol V az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ és a $0 \leq x$, $0 \leq y$, $\sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq 2z$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány
- (h) $\iiint_V x^2 z dV$, ahol V az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ és a $3z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány
- (i) $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$ ahol $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$.

4. feladat (4.3. Integráltranszformációk)

Mekkora a V tartomány térfogata?

- (a) V az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű hengernek a $z = 0$ és az $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok közé eső része.
- (b) V az a gömbhéjcikk, melyet a gömbi koordinátákkal adott $r = 1$ és $r = 2$ sugarú gömbök és a $\vartheta = \pi/4$ és a $\vartheta = \pi/3$ kúpok határolnak
- (c) V a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ felületek közé eső rész
- (d) V a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, a $z = 0$ sík és az $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ henger által határolt korlátos térrész.
- (e) V az $R > 0$ középsugarú és $r \in]0, R[$ gyűrűsugarú tórusz
- (f) $R > 0$ és $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 \leq (\frac{R}{2})^2\}$
- (g) $R > 0$ és $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2, y^2 + z^2 \leq R^2\}$
- (h) $R > 0$ és $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2, y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + z^2 \leq R^2\}$
- (i) $R > 0$ és $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 4yz \leq R^2\}$
- (j) V az $z = x^2 + y^2$ paraboloid, a $z = 0$ sík és az $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ alapkörű egyenes körhenger által határolt korlátos tartomány.
- (k) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \geq 1, z \geq 0\}$.
- (l) V az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, az $y = \frac{bx}{a}$, az $y = 0$ illetve $z = 0$ felületek által határolt $x > 0$ térrész.
- (m) V az $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = x$ felület által határolt tartomány.

4.4. Ívhossz, vonal-integrál

1. feladat (4.4. Ívhossz, vonal-integrál)

Határozzuk meg az alábbi síkgörbék és térgörbék ívhosszát!

- (a) $\varphi(t) = (t \cos(3 \ln t), t \sin(3 \ln t), 2t), (t \in [0, 2\pi])$
- (b) $\varphi(t) = (3 \cos t, 2t, 3 \sin t), (t \in [0, 2\pi])$
- (c) φ az $y = x^{3/2}$ függvény grafikonjának az $x \in [1, 9]$ intervallum feletti része.
- (d) A görbe az $x^2 = 3y$ és a $2xy = 9z$ felületek metszésvonala az $0 \leq x \leq 2$ koordináták között.
- (e) A görbe az úgynevezett *Viviani-féle görbe*, azaz az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb és az $x^2 + y^2 - Rx = 0$ henger metszésvonala.
- (f) Az origó középpontú $R > 0$ sugarú tenniszlabdán található görbevonal egyenlete (jó közelítéssel) $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(t) = (R \cos^3 t, R \sin^3 t, \sqrt{3} \sin t \cos t)$. Mekkora a görbe ívhossza?

2. feladat (4.4. Ívhossz, vonal-integrál)

Határozzuk meg az $\int_{\varphi} \mathbf{v}$ vonalintegrálokat az alábbi esetekben!

- (a) $\mathbf{v}(x, y, z) = (x + yz, x^2 - z^2, xy + z)$, és
 - i. φ az $A(-1, 2, 0)$ pontból a $B(5, 5, 9)$ -ig tartó egyenesszakasz,
 - ii. φ az $A(-1, 2, 0)$ pontból induló, és a $B(5, 5, 9)$ pontba érkező töröttvonal, mely először az x , majd a z , végül az y tengellyel párhuzamos szakaszokból áll.
- (b) $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, y, z)$ és $\varphi(t) = (\cos^2 t, \cos t \sin t, \sin t)$, $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{4})$.
- (c) $\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2 + y + z, x + y^2 + z, x + y + z^2)$, $(\varphi(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, 2t))$, $(0 \leq t \leq 2)$.
- (d) $\mathbf{v}(x, y, z) = (2xy, 2z^2, -x^2 - y^2)$, $\varphi(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $(t \in [0, \pi])$.
- (e) $\mathbf{v}(x, y, z) = (y + z^2, x + z, x + y)$, φ az $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$ háromszög oldala az $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ bejárással.
- (f) $\mathbf{v}(x, y, z) = (2xy^2, 2x^2y, -2x^2y^2)$ és φ az $x^2 + z^2 = 1$ és az $y = 2$ felületek metszészvonala.
- (g) $\mathbf{v}(x, y, z) = (xy, y^2, z^3)$, $\varphi(t) = (t, t^2 + 1, e^t)$, $(t \in [0, 1])$.
- (h) $\mathbf{v}(x, y, z) = (xy, y, 0)$, $\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$ (ciklois), $(t \in [0, \pi])$.
- (i) $\mathbf{v}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ és φ az $A = (0, 1, 0)$ pontból induló és a $B = (1, 0, 0)$ pontban végződő szakasz.

3. feladat (4.4. Ívhossz, vonal-integrál)

Potenciálosak-e az alábbi vektormezők? Ha igen, határozzuk meg egy potenciálfüggvényét!

- (a) $\mathbf{v}(x, y, z) = (yz - xy, xz - \frac{x^2}{2} + yz^2, xy + y^2z)$.
- (b) $\mathbf{v}(x, y) = (5x^2y - 4xy, 3x^2 - 2y)$.
- (c) $\mathbf{v}(x, y, z) = (e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz})$.

4. feladat (4.4. Ívhossz, vonal-integrál)

Az alábbiakban $U \in \mathbb{R}^2$ egy síkbeli tartomány, melynek határgörbáját fr U jelöli. A Green-tétel segítségével határozzuk meg a

$$\int_{\operatorname{fr} U} \mathbf{v}$$

integrálokat, ahol

- (a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x^2\}$ és $\mathbf{v}(x, y) = (x \cos y, y + x)$.
- (b) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ és $\mathbf{v}(x, y) = (-y^3, x^3)$.

5. feladat (4.4. Ívhossz, vonal-integrál)

Számítsuk ki az alábbi görbék által határolt tartomány területét!

- (a) $\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $(t \in [0, 2\pi])$.
- (b) $\varphi(t) = (2t - t^2, 2t - t^3)$, $(t \in [0, 2])$.

4.5. Felszín, felületi integrál

1. feladat (4.5. Felszín, felületi integrál)

Számoljuk ki az adott felületdarabok felszínét!

- (a) $\mathbf{r}(u, v) = (u^2, 2u \cos v, 2u \sin v)$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.
- (b) $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $-1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$
- (c) $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos \ln v, u \sin \ln v, u)$, $0 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2$.
- (d) $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.
- (e) $x^2 = 2yz$, $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$.
- (f) Az origó középpontú $R > 0$ sugarú gömb.
- (g) Egyenes kúp palástja, ha az alapkör sugara $R > 0$ és a kúp magassága $h > 0$.
- (h) Csavarfelület, melynek paraméterezése $P : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, u + v)$.
- (i) Tórusz, ahol $0 < b \leq a$ és a paraméterezés $P : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(\vartheta, \varphi) \mapsto ((a + b \cos \varphi) \cos \vartheta, (a + b \cos \varphi) \sin \vartheta, b \sin \varphi)$.

2. feladat (4.5. Felszín, felületi integrál)

Határozzuk meg az adott függvények integrálját a megadott $\mathbf{r}$ felületeken.

- (a) Legyen $f(x, y, z) = xyz$ és $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.
- (b) Legyen $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, y, z)$ és $\mathbf{r}$ az $(1, 0, 0)$ középpontú 1 sugarú gömbhéj $z \geq 0$ része, valamint a felület $\mathbf{n}$ normálvektorára $\langle \mathbf{n}, (0, 0, 1) \rangle \geq 0$ teljesüljön.
- (c) Legyen $\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x, y, z) \times (0, 0, 1)$ és $\mathbf{r}$ a $z = 0$ sík $x^2 + y^2 \leq 1$ része, valamint a felület $\mathbf{n}$ normálvektorára $\langle \mathbf{n}, (0, 0, 1) \rangle \geq 0$ teljesüljön.
- (d) Legyen $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, 3x, -2z)$, továbbá $\mathbf{r}$ legyen az $(1, 2, 3)$ csúcspontú és a $z = 1$ síkban az $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ vezérgörbéjű kúp palástjának a $z = 1$ és a $z = 3$ síkok közötti része, valamint a felület $\mathbf{n}$ normálvektorára $\langle \mathbf{n}, (0, 0, 1) \rangle \geq 0$ teljesüljön.
- (e) Legyen $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, y, z)$, és legyen $\mathbf{r} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ az $(u, v) \mapsto (\cos v(3 + \cos u), \sin v(3 + \cos u), \sin u)$ paraméterezésű tóruszdarab befelé vett irányítással (vagyis mutasson az $\mathbf{n}$ normálvektor a felület által körülzárt korlátos térrész felé).
- (f) $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, -y, z)$, $\mathbf{r}(u, v) = (u + 2v, v, u - v)$, $0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 1$, ahol a felület normálvektora a z tengely pozitív felével hegyesszöget zár be.
- (g) $\mathbf{v}(x, y, z) = (xy, xz, yz)$, $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2)$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, ahol a felület normálvektora a z tengely pozitív felével tompaszöget zár be.
- (h) $\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, $\mathbf{r}$ az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és $z \geq 0$ feltételek szerint adott felület.
- (i) $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, y, z)|x, y, z|^3$, $\mathbf{r}$ az origó körüli egységgömbfelszín xy -sík feletti része, a gömb középpontja felé mutató normálissal.

3. feladat (4.5. Felszín, felületi integrál)

Számoljuk ki a $\mathbf{v}$ vektor-vektor függvények görbementi integrálját az adott $\boldsymbol{\varphi}$ úton, ha lehet Stokes-tétellel!

- (a) $\mathbf{v}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$, $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin t, \cos t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- (b) $\mathbf{v}(x, y, z) = (2xy - z, x^2 + z, y - x)$ ahol $\boldsymbol{\varphi}$ az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 1$ egyenletű ellipszis, pozitív körüljárási iránnyal.
- (c) $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, y, z)$, $\boldsymbol{\varphi}$ az xy síkban fekvő origó középpontú egységkör negatív körüljárással.

4. feladat (4.5. Felszín, felületi integrál)

Számoljuk ki a $\mathbf{v}$ vektormező felületi integrálját az adott $\mathbf{r}$ felület mentén Gauss-Osztrogradszkij-tétellel!

- (a) $\mathbf{v}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, $\mathbf{r}$ az $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ befelé mutató normálissal
- (b) $\mathbf{v}(x, y, z) = (3xy, y^2, -4xz)$, $\mathbf{r}$: $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 4 = 0$, kifelé mutató normálissal.
- (c) $\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2y^2, 1z)$ ahol $\mathbf{r}$ a $z = 25 - x^2 - y^2$ és $z = 0$ által határolt zárt felület, kifelé mutató normálissal.
- (d) $\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, $\mathbf{r}$ a koordinátasíkok és az $x^2 + y^2 + 2z = 1$ által határolt zárt felület, befelé mutató normálissal.

5. feladat (4.5. Felszín, felületi integrál)

- (a) Legyen $\mathbf{r}$ a $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \geq 0$ része, és az $\mathbf{n}$ normális vektorára teljesüljön az $\langle \mathbf{n}, (0, 0, 1) \rangle \geq 0$ egyenlet. Továbbá legyen $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}(x, y, z) = (xz, zy, yx)$. Határozza meg az $\iint_{\mathbf{r}} \text{rot} \mathbf{v}$ integrál értékét. alkalmazásával is.
- (b) Legyen $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ és legyen $\mathbf{r}$ az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloid $0 \leq y \leq 4$ része $\langle \mathbf{n}, (0, 1, 0) \rangle \geq 0$ irányítással, ahol $\mathbf{n}$ a felület normálvektora. Határozzuk meg az $\iint_{\mathbf{r}} \mathbf{v}$ integrál értékét.
- (c) Legyen $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}(x, y, z) = (x + e^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, 0)$ és $\mathbf{r}$ az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z \geq 0$ része. Határozza meg az $\iint_{\mathbf{r}} \mathbf{v}$ integrál értékét.