

Kalkulus 2

Pataki Gergely

BME

2014. január 16.–2026. február 11.

pataki@math.bme.hu
math.bme.hu/~pataki/crs/kalk2

Definíció

Ha x_n egy sorozat, akkor az

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

sorozatot (valós) számsornak, vagy röviden sornak nevezzük, és

$$\sum x_n\text{-nel}$$

jelöljük. s_n -t a sor n -edik részletösszegének, x_n -t az n -edik tagjának nevezzük.

Ahogy a sorozatoknál láttuk, x_n indexei néha nem 1-től, hanem 0-tól, 2-től vagy máshonnan kezdődnek. Ilyenkor az s_n részletösszeg-sorozat indexei is 0-tól, 2-től vagy máshonnan kezdődnek. Van amikor ezt jelezzük, mert a soroknál ennek lehet jelentősége. Ilyenkor a következő jelöléseket használjuk.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \text{illetve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor **konvergens**, ha az s_n részletösszeg-sorozat konvergens. Ilyenkor s_n határértéket a sor **összegének** nevezzük, amire szintén használjuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

jelölést.

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor nem konvergens, akkor **divergensnek** nevezzük. Ha $\lim s_n = \pm\infty$, akkor ezt is szoktuk a sor **összegének** nevezni.

Példa

Láttuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

vagyis a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens. Ezt a sort **harmonikus sornak** nevezzük.

Feladat (Teleszkopikus összeg)

Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

sor? Adjuk meg az összegét, ha van!

Definíció (sorok zárójelezése)

Ha $b : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ szigorúan monoton növény úgy, hogy $b(1) = 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor egy zárójelezésének hívjuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=b(n)}^{b(n+1)-1} x_k \right)}_{y_n}$$

sort.

Megjegyzés

$$\sum y_n = y_1 + y_2 + \dots = (x_1 + \dots + x_{b(2)-1}) + (x_{b(2)} + \dots + x_{b(3)-1}) + \dots$$

Tétel (Asszociativitás)

Ha $\sum x_n$ összeg létezik (konvergens, vagy $\sum x_n = \pm\infty$), akkor egy tetszőleges zárójelezésének is létezik összege, sőt megegyezik az eredeti összeggel.

Tegyük fel, hogy x_n és y_n sorozatok csak véges sok tagban különböznek egymástól, azaz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöb, hogy

$$n > N \quad \text{esetén} \quad x_n = y_n.$$

Legyenek $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, és $t_n = \sum_{k=1}^n y_k$ a részletösszeg-sorozatok, és legyen

$$\alpha = s_N - t_N!$$

Ekkor $\alpha = s_n - t_n$, azaz $t_n = \alpha + s_n$ teljesül minden $n > N$ esetén. Így s_n pontosan akkor konvergens, ha t_n az, és ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \lim t_n = \alpha + \lim s_n = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Illetve $s_n \rightarrow \infty$ pontosan akkor, ha $t_n \rightarrow \infty$, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \infty.$$

Véges sok tag elhagyása, megváltoztatása, vagy véges sok tag hozzávétele nem változtatja meg, hogy konvergens-e sor, illetve ha összege ∞ volt, akkor véges sok tag megváltoztatása után is ∞ marad.

Azonban, ha a sor konvergens, véges sok tag megváltoztatása megváltoztathatja a sor összegét.

Példa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2},$$

ugyanis a már ismert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

sorból csak 1 tagot hagytunk el, vagyis az új sor konvergens marad, de összege változik, még hozzá

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tétel (Cauchy-kritérium sorokra)

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

sor pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $N \in \mathbb{R}$ küszöb, hogy

$$n > k > N \quad \text{esetén} \quad |x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n| < \varepsilon.$$

Tétel (A sor konvergenciájának szükséges feltétele)

Ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

sor konvergens, akkor x_n nullsorozat.

Példa

Láttuk, hogy fordítva nem igaz, vagyis a feltétel nem elégséges. Ugyanis

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{de} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Példa

$$\sum \sqrt[n]{n}, \quad \text{és} \quad \sum \sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$$

is divergens, hiszen korábban láttuk, hogy

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0, \quad \text{és} \quad \lim \sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}} = \frac{5}{4} \neq 0.$$

$$\sum (-1)^n$$

is divergens, mert $(-1)^n$ divergens.

Definíció

Ha x_n mértani sorozat, akkor a $\sum x_n$ sort **mértani sornak**, vagy **geometriai sornak** nevezzük.

A nem azonosan 0 mértani sor konvergenciája csak a kvóciensétől függ, összege pedig a kvóciensétől, és az 1. elemtől. Ezt mutatja a következő tétel.

Tétel

Legyen a $\sum x_n$ mértani sor kvóciense q , és első eleme $a \neq 0$! A mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$ teljesül, és ekkor összege

$$\sum x_n = \frac{a}{1 - q}.$$

Feladat

Konvergens-e a

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

sor? Ha igen, adjuk meg az összegét!

Feladat

Konvergens-e a

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

sor? Ha igen, adjuk meg az összegét!

Feladat

Számoljuk ki az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

Végtelen összeget!

Tétel

Ha $\sum x_n$ és $\sum y_n$ is konvergens, továbbá $c \in \mathbb{R}$, akkor $\sum(x_n \pm y_n)$ és $\sum(cx_n)$ is konvergens, továbbá

1. $\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n,$
2. $\sum(x_n - y_n) = \sum x_n - \sum y_n,$
3. $\sum(cx_n) = c \sum x_n.$

Feladat

Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} + 3^n}{4^{n-1}}$$

sor? Ha igen, adjuk meg az összegét!

Feladat

Konvergens-e a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^n - 5^n}{3^n}$$

sor? Ha igen, adjuk meg az összegét!

A következő tétel miatt külön foglalkozunk azokkal a sorokkal melyek tagjai nem negatívak.

Definíció

Nem negatív tagú sornak nevezzük a $\sum x_n$ sort, ha $x_n \geq 0$ minden n -re.

Tétel

Ha a

$$\sum x_n$$

nem negatív tagú sor divergens, akkor összege ∞ .

Emiatt a $\sum x_n$ nem negatív tagú sornál a konvergencia vagy divergencia helyett elég csak azt írunk, hogy $\sum x_n < \infty$, vagy $\sum x_n = \infty$.

Összehasonlító tesztek

Tétel (Majoráns-kritérium nem negatív tagú sorokra)

Ha $0 \leq x_n \leq y_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ -re, és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ is az. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Tétel (Minoráns-kritérium)

Ha $0 \leq x_n \leq y_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ -re, és $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ is az.

Megjegyzés

Mindkét tételhez elég, ha $0 \leq x_n \leq y_n$ csak elég nagy n -re teljesül.

Feladat

Konvergens-e a

$$\sum \frac{n}{2^n}$$

sor?

Összehasonlító teszt

Következmény (Összehasonlító teszt nem negatív tagú sorokra)

Ha $0 < y_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ -re, $\frac{x_n}{y_n}$ konvergens $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} > 0$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ közül vagy mindkettő konvergens, vagy egyik sem.

Megjegyzés

Most is elég, ha $0 < y_n$ csak elég nagy n -re teljesül.

Tétel (kondenzációs vagy ritkítási kritérium (Cauchy))

Legyen x_n monoton csökkenő sorozat. Ekkor $\sum x_n$ pontosan akkor konvergens, ha $\sum (2^n x_{2^n})$ konvergens.

Tétel

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$.

A konvergencia vizsgálatánál nem számít, hogy honnan kezdjük a szummát, ezért a következő feladatokban ezt nem jelöljük.

Feladat

Konvergens-e a

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

sor?

Feladat

Konvergens-e a

$$\sum \frac{n+3}{n^3-2}$$

sor?

Feladat

Konvergens-e a

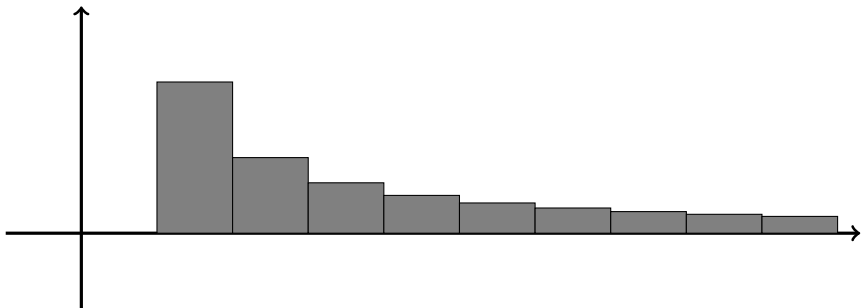
$$\sum \frac{n+3}{n^2-2}$$

sor?

Tétel

Legyen a_n egy sorozat, és $f(x) = a_{\lfloor x \rfloor}$. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pontosan akkor konvergens, ha f improprius integrálható az $[1, \infty[$ -en. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_1^{\infty} f.$$

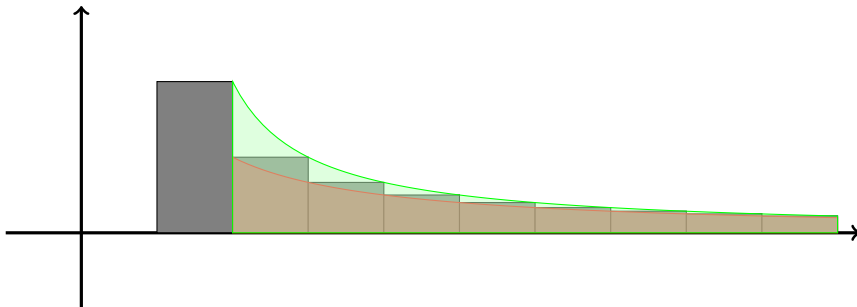


Tétel (Integrálkritérium)

Legyen f monoton csökkenő, és $[1, \infty[\subset D_f$! f pontosan akkor improprius integrálható

$[1, \infty[-$ -en, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sor konvergens. Ekkor

$$\int_2^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_2^{\infty} f(t-1) dt.$$



Tétel

A $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{\alpha}}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$.

Definíció

Ha x_n monoton nullsorozat, akkor a

$$\sum (-1)^n x_n$$

sort **Leibniz-sornak** nevezzük.

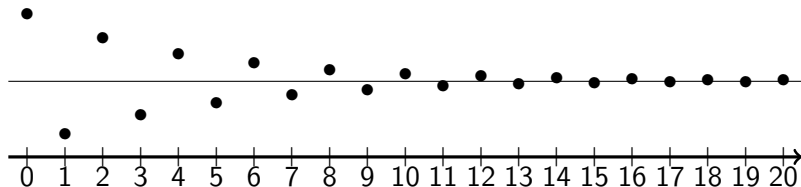
Megjegyzés

A kétféle Leibniz-sor csak előjelben különbözik, így elég csak az egyikkel foglalkoznunk. Ha x_n monoton csökkenő, akkor tagjai nem kisebbek a határértékénél, vagyis 0-nál, azaz nem negatívak. Ha x_n monoton növekvő, akkor tagjai nem pozitívak. Emiatt a sor n -edik tagja $(-1)^n x_n$ az n paritásától függően nem negatív, vagy nem pozitív. Az ilyen sorokat **alternáló** vagy **jelváltó** sornak nevezzük.

A Leibniz-sorok tehát alternálóak, teljesítik a konvergencia szükséges feltételét, vagyis az n -edik tag tart nullához, és fontos, hogy az n -edik tag abszolútértéke monoton csökkenő, vagyis az n -edik tag mindig egyre közelebb kerül a 0-hoz.

Tétel (Leibniz-kritérium)

Minden Leibniz-sor konvergens, és összege bármely két közvetlenül egymás utáni részletösszege közé esik.



Feladat

Konvergens-e az **alternáló harmonikus sor**, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} ?$$

Tétel

A

$$\sum (-1)^n x_n$$

Leibniz-sor n -edik részletösszegének err hibájára

$$|err| \leq |x_{n+1}|.$$

Feladat

Adjunk korlátot az alternáló harmonikus sor n -edik részletösszegének hibájára!

Definíció

A

$$\sum x_n$$

sor **abszolút konvergensnek** nevezzük, ha a

$$\sum |x_n|$$

sor konvergens. Ha

$$\sum x_n$$

konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor azt mondjuk, hogy **feltételesen konvergens**.

Nyilván egy nem negatív tagú sor pontosan akkor konvergens, ha abszolút konvergens, így nem lehet feltételesen konvergens.

Általában egy konvergens sor nem feltétlenül abszolút konvergens, lásd például az alternáló harmonikus sort.

A fordított állítás viszont általában is igaz.

Tétel

Abszolút konvergens sor konvergens.

Következmény

Ha $\sum x_n$ abszolút konvergens, akkor $|\sum x_n| \leq \sum |x_n|$.

Feladat

Döntsük el, hogy a

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{n+3}{n+1} \right),$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{n+3}{n^2+1} \right),$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{n+3}{n^3+1} \right)$

sorok abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek vagy divergensek!

Példa

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

alternáló harmonikus sor feltételesen konvergens. Írjuk fel más sorrendben a tagokat úgy, hogy az összeg éppen 1 legyen! Ehhez vegyük először a pozitív tagokat addig, amíg túljutunk 1-en!

$$1 + 1/3 \approx 1.33 > 1$$

Most vegyük a negatív tagokat addig, amíg az összeg kevesebb lesz 1-nél!

$$1 + 1/3 - 1/2 \approx 0.83 < 1$$

Most újra pozitív tagokat vegyünk!

$$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 \approx 1.03 > 1$$

Most újra negatív tagokat vegyünk!

$$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 - 1/4 \approx 0.78 < 1$$

Példa

$$1 + \frac{1}{3} \approx 1.33 > 1$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \approx 0.83 < 1$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \approx 1.03 > 1$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \approx 0.78 < 1$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \approx 1.04 > 1$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \approx 0.87 < 1$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \approx 1.04 > 1$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{8} \approx 0.91 < 1$$

Példa

Most rendezzük úgy át, hogy ∞ legyen az összeg!

$$1 + \frac{1}{3} \approx 1.33 > 1$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \approx 0.83 < 1$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{41} \approx 2.004 > 2$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{41} - \frac{1}{4} \approx 1.754 < 2$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{41} - \frac{1}{4} + \frac{1}{43} + \cdots + \frac{1}{507} \approx 3.0004 > 3$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{41} - \frac{1}{4} + \frac{1}{43} + \cdots + \frac{1}{507} - \frac{1}{6} \approx 2.8333 < 3$$

$$+ \frac{1}{509} + \cdots + \frac{1}{5235} \approx 4.0002 > 4$$

$$- \frac{1}{8} \approx 3.8752 < 4$$

Példa

Most rendezzük úgy át, hogy ne legyen összeg!

$$1 + \frac{1}{3} \qquad \approx 1.33 \qquad > 1$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{16} \qquad \approx -0.03 \qquad < 0$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{31} \qquad \approx 1.01 \qquad > 1$$

$$-\frac{1}{18} - \dots - \frac{1}{128} \qquad \approx -0.004 \qquad < 0$$

$$+\frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{239} \qquad \approx 1.004 \qquad > 1$$

$$-\frac{1}{130} - \dots - \frac{1}{960} \qquad \approx -0,0005 \qquad < 0$$

Definíció

Ha x_n egy sorozat, és $\varphi : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ bijekció (azaz a természetes számok halmazának egy permutációja), akkor az $x_{\varphi(n)}$ sorozatot az x_n egy **átrendezésének** nevezzük. Hasonlóan azt is mondjuk, hogy a $\sum x_{\varphi(n)}$ sor a $\sum x_n$ egy **átrendezése**.

Megjegyzés

Nem negatív tagú sor esetén az összeget úgy is megkaphatjuk, hogy vesszük a szuprémumát azoknak a számoknak, melyeket úgy kapunk, hogy a sor tagjai közül véges sokat összeadunk. Ezért ilyenkor a sor átrendezése nem változtatja meg az összegét.

Az előző tételben szereplő x_n^+ és x_n^- sorok nem negatív tagúak, így vagy konvergensek vagy a ∞ -hez divergálnak. (Persze egymástól függetlenül.)

Tétel (Riemann-féle átrendezési tétel)

Ha $\sum x_n^+ = \sum x_n^- = \infty$, x_n nullsorozat, és $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor a $\sum x_n$ sornak létezik olyan átrendezése, melynek összege a , olyan átrendezése, melynek összege ∞ vagy $-\infty$, és olyan is melynek nem létezik összege.

Tétel

Ha $\sum x_n$ sor feltételesen konvergens, akkor $\sum x_n^+ = \sum x_n^- = \infty$.

Ha $\sum x_n^+ = \infty$, de $\sum x_n^- < \infty$, akkor $\sum x_n = \infty$, és akárhogy is rendezzük át az összeg nem változik.

Ha $\sum x_n^+ < \infty$, de $\sum x_n^- = \infty$, akkor $\sum x_n = -\infty$, és akárhogy is rendezzük át az összeg nem változik.

A $\sum x_n$ sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha $\sum x_n^+ < \infty$ és $\sum x_n^- < \infty$. Ekkor

$$\sum x_n = \sum x_n^+ - \sum x_n^-,$$

és akárhogy rendezzük át a sort, az összeg nem változik.

Útmutatás.

Nem negatív tagú sor átrendezése nem változtatja az összegét, és alkalmazhatjuk a majoráns kritériumot, illetve a konvergens sorok összegére vonatkozó tételt, hiszen

$$0 \leq x_n^+, x_n^- \leq |x_n| = x_n^+ + x_n^-. \quad \square$$

Definíció

Az x_n sorozatot **korlátos változású**nak nevezzük, ha a $\sum |x_{n+1} - x_n|$ sor konvergens.

Tétel

1. *Monoton sorozat pontosan akkor korlátos változású ha korlátos.*
2. *Valós számsorozat pontosan akkor korlátos változású, ha felbontható két monoton, korlátos sorozat összegére.*

Következmény

Korlátos változású sorozat konvergens.

Feladat

Mutassuk meg, hogy az $x_n = \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$ sorozat korlátos változású!

Tétel (Dirichlet-kritérium)

Legyen x_n korlátos változású nullsorozat, és $\sum \alpha_n$ részletösszezsorozata korlátos. Ekkor $\sum \alpha_n x_n$ konvergens, és

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k x_k) \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| \right) \cdot \left(\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left| \sum_{k=0}^n \alpha_k \right| \right).$$

Feladat

Mutassuk meg, hogy $\sum \left(\frac{\sin n}{n} \right)$ konvergens.

Következmény (Abel-kritérium)

Legyen x_n korlátos változású, és $\sum \alpha_n$ konvergens. Ekkor $\sum (\alpha_n x_n)$ konvergens.

Tétel (Majoráns-kritérium (Weierstrass))

Ha $|x_n| \leq y_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és a

$$\sum y_n$$

sor konvergens, akkor a

$$\sum x_n$$

sor abszolút konvergens.

Útmutatás.

A nem negatív tagú sorokra tanult majoráns-kritérium egyszerű következménye.



Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium)

- ▶ Ha $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, akkor a $\sum x_n$ sor abszolút konvergens.
- ▶ Ha $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, vagy $\limsup \sqrt[n]{x_n} = \infty$, akkor a $\sum x_n$ sor divergens.

Ha $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} = 1$, akkor a gyökkritérium alapján általában nem tudjuk eldönteni a sor konvergenciáját.

A bizonyításból látható, hogy a divergenciához gyengébb feltétel is elég.

Tétel

Ha $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ teljesül végtelen sok $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, akkor a $\sum x_n$ sor divergens.

Ilyenkor lehet, hogy $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} = 1$.

Példa

A $x_n = 1$ konstans sorozat esetén $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} = 1$, de a fenti gyengébb feltétel teljesül, így a $\sum x_n$ sor divergens.

Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium limeszes alakja)

Tegyük fel, hogy létezik $C = \lim \sqrt[n]{|x_n|}$. Ekkor

- ▶ ha $C < 1$, akkor a $\sum x_n$ sor abszolút konvergens.
- ▶ ha $C > 1$, vagy $C = \infty$, akkor a $\sum x_n$ sor divergens.

Természetesen $C = 1$ eset most is kérdéses.

Feladat

Konvergens-e a $\sum \frac{n^5}{n!}$ sor?

Feladat

Konvergens-e a $\sum \frac{n!}{5^n}$ sor?

Feladat

Konvergens-e a $\sum \frac{n^2 + 2}{2n^2 + 1}$ sor?

Tétel

Ha $x_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, akkor

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium)

Tegyük fel, hogy elég nagy n -re $x_n \neq 0$.

- ▶ *Ha $\limsup \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$, akkor a $\sum x_n$ sor abszolút konvergens.*
- ▶ *Ha $\liminf \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| > 1$, vagy $\liminf \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \infty$, akkor a $\sum x_n$ sor divergens.*

Ha $\liminf \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq 1 \leq \limsup \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$, akkor a hányadoskritérium alapján általában nem tudjuk eldönteni a sor konvergenciáját.

A bizonyításból látható, hogy a divergenciához gyengébb feltétel is elég.

Tétel

Ha $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \geq 1$ teljesül véges sok $n \in \mathbb{N}^+$ kivételével, akkor a $\sum x_n$ sor divergens.

Ilyenkor lehet, hogy $\liminf \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = 1$.

Példa

A $x_n = 1$ konstans sorozat esetén $\liminf \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = 1$, de a fenti gyengébb feltétel teljesül, így a $\sum x_n$ sor divergens.

Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium limeszes alakja)

Tegyük fel, hogy létezik $C = \lim \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$. Ekkor

- ▶ ha $C < 1$, akkor a $\sum x_n$ sor abszolút konvergens.
- ▶ ha $C > 1$, vagy $C = \infty$, akkor a $\sum x_n$ sor divergens.

Feladat

Konvergens-e a $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$ sor?

Próbálkozhathnánk a gyökkritériummal, azonban

$$\lim \sqrt[n]{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim 2 \frac{\sqrt[n]{n!}}{n},$$

ami egy $\frac{\infty}{\infty}$ alakú határérték, és egyelőre nem tudjuk kiszámolni.

Feladat

Konvergens-e a $\sum \frac{3^n n!}{n^n}$ sor?

Feladat

Konvergens-e a $\sum \frac{e^n n!}{n^n}$ sor?

Feladat

Vizsgáljuk hányadoskritériummal a $\sum 2^{(-1)^n - n}$ sort?

Legyen $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ és $t = \lim s_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \mathbb{R}$.

Ha t sorösszeget s_n -nel becsüljük, akkor hiba $err = t - s_n$ abszolútértékére kellene felső korlátot adni.

$$|err| = |t - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right|.$$

- ▶ Ha a sor abszolút konvergens, akkor $|err|$ felülről becsülhető $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|$ nem negatív tagú sor összegével, amit a majoráns kritériummal becsülhetünk felülről. $\sum \frac{1}{n^2}, \sum \frac{1}{n^3}, \sum \frac{1}{n!}$
- ▶ Ha a sor Leibniz-sor, akkor $|x_{n+1}|$ lesz egy felső becslés.
- ▶ Ha a sor a Dirichlet-kritériumban szereplő feltételeket teljesíti, akkor az ott szereplő becslést adhatjuk. $\sum \frac{\sin n}{n}$

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens sorok, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right), \text{ ahol } a_n = \sum_{\max\{j,k\}=n} x_j y_k.$$

Cauchy szorzat

Tétel (Mertens)

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right), \text{ ahol } c_n = \sum_{j+k=n} x_j y_k.$$

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ is abszolút konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ is az.

Megjegyzés

A fenti c_n az x_n és y_n sorozatok **konvolúciója**, amire szokásos az $(a * b)_n$ jelölés.

Feladat

Konvergens-e a $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ sor önmagával vett Cauchy-szorzata?

Definíció

Definiáljuk az $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt a következőképpen.

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Megjegyzés

Más jelölések: $\exp_e(z) = e^z = \exp(z)$. Ezt a függvényt **komplex exponenciális** függvénynek fogjuk nevezni.

Tétel

A definícióban szereplő sor minden $z \in \mathbb{C}$ esetén abszolút konvergens.

Bizonyítás.

A gyökkritérium (48) alapján egyszerű.



Tétel (exp addíciós tétele)

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$$

Következmény

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

$$0 \notin \text{Ran}_{\exp}$$

$$e = \exp(1) \text{ és } q \in \mathbb{Q} \text{ esetén } \exp(q) = e^q.$$

Tétel

A (62) definícióban szereplő $\exp$ függvény deriváltja önmaga.

Tétel

A (62) definícióban szereplő $\exp$ függvény megegyezik a korábban definiálttal.

Definíció

Definiáljuk az $\operatorname{sh} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ és $\operatorname{ch} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt a következőképpen.

$$\operatorname{sh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Megjegyzés

Más jelölések: $\sinh(z) = \operatorname{sh}(z)$, $\cosh(z) = \operatorname{ch}(z)$. Ezeket a függvényeket **komplex szinusz hiperbolikus**, illetve **komplex koszinusz hiperbolikus függvény**nek nevezzük.

Tétel

A definícióban szereplő sorok minden $z \in \mathbb{C}$ esetén abszolút konvergensek.

Bizonyítás.

A gyökkritérium (48) alapján egyszerű.



Tétel

A (66) definícióban szereplő sh és ch függvény megegyezik a korábban definiálttal.

Definíció

Definiáljuk a $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ és $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt a következőképpen.

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Megjegyzés

Ezeket a függvényeket **komplex szinusz**, illetve **komplex koszinusz függvény**nek nevezzük.

Tétel

A definícióban szereplő sorok minden $z \in \mathbb{C}$ esetén abszolút konvergensek.

Bizonyítás.

A gyökkritérium (48) alapján egyszerű.



Tétel

A (68) definícióban szereplő $\sin$ és $\cos$ függvény megegyezik a korábban definiálttal.

1. Ha $x \in]0, \sqrt{6}[$, akkor $\sin x > 0$.
2. A $\cos$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \sqrt{6}]$ intervallumon.
3. $\exists! x \in]1.4, 1.6[: \cos x = 0$. Jelölje ennek az egyetlen zérushelynek a kétszeresét π .
4. $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$,
 $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$,
 $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\cos(3\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(3\frac{\pi}{2}) = -1$, $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$.
5. A valós $\cos$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \pi]$ intervallumon, és szigorúan monoton növekvő a $[\pi, 2\pi]$ intervallumon. A valós $\sin$ függvény szigorúan monoton növekvő a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]$ intervallumon.
6. $\sin z = 0 \iff \frac{z}{\pi} \in \mathbb{Z}$
7. A komplex $\cos$ és $\sin$ függvények periodikusak. A periódus 2π . Más periódus nincs, csak ennek többszörösei.
8. Ha $D = \{x + iy \in \mathbb{C} : |x| < \frac{\pi}{2} \text{ vagy } (|x| = \frac{\pi}{2} \text{ és } xy \geq 0)\}$, akkor $\sin|_D : D \rightarrow \mathbb{C}$ bijekció.
9. Ha $D = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x < \pi \text{ vagy } (x = 0 \text{ és } y \geq 0) \text{ vagy } (x = \pi \text{ és } y \leq 0)\}$, akkor $\cos|_D : D \rightarrow \mathbb{C}$ bijekció.

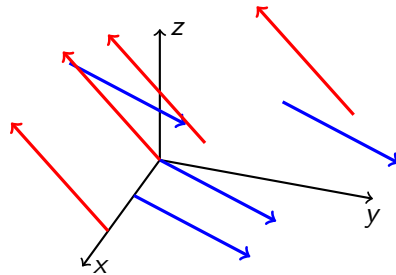
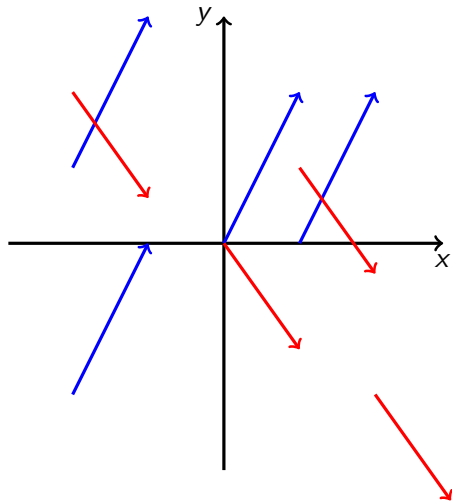
Tétel

1. Ha $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in]-\pi, \pi]\}$, $R = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, akkor $\exp|_D : D \rightarrow R$ bijekció.
Inverze $\ln : R \rightarrow D$ teljesíti az $\operatorname{Re}(\ln z) = \ln |z|$ és $\operatorname{Im}(\ln z) = \arg z \in]-\pi, \pi]$ egyenleteket.
2. e^z periodikus $2\pi i$ szerint. Más periódus nincs, csak ennek többszörösei.

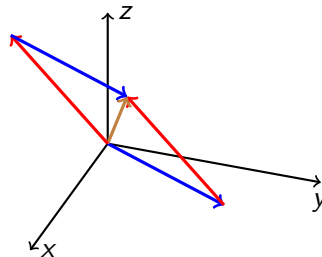
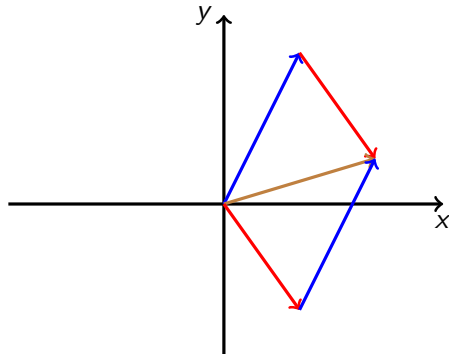
Tétel

1. $\operatorname{sh}(\imath z) = \imath \sin(z)$, $\operatorname{sh}(\pi \imath - z) = \operatorname{sh} z$ és $\operatorname{ch}(\imath z) = \cos(z)$.
2. sh és ch periodikus $2\pi \imath$ szerint. Más periódus nincs, csak ennek többszörösei.
3. $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \text{ vagy } (|\operatorname{Im} z| = \frac{\pi}{2} \text{ és } \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z \geq 0)\}$, jelöléssel $\operatorname{sh}|_D : D \rightarrow \mathbb{C}$ bijekció.
4. Ha $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in]0, \pi[\text{ vagy } (\operatorname{Im} z = 0 \text{ és } \operatorname{Re} z \geq 0) \text{ vagy } (\operatorname{Im} z = \pi \text{ és } \operatorname{Re} z \leq 0)\}$, akkor $\operatorname{ch}|_D : D \rightarrow \mathbb{C}$ bijekció.

Szabad vektorok



Összeadás



$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

► $\exists \mathbf{0} : \forall \mathbf{a} : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

► $\forall \mathbf{a} : \exists \mathbf{b} : \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$

► $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} : (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

► $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

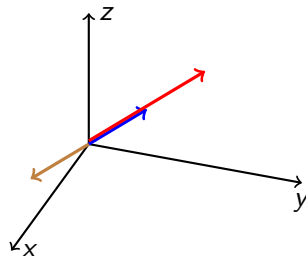
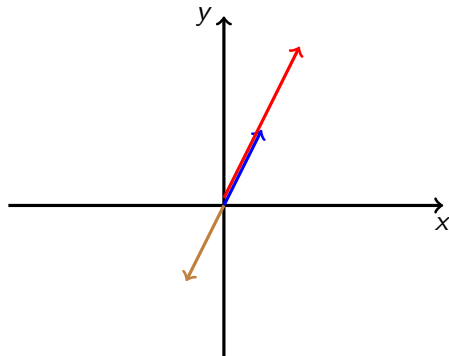
(létezik nullelem);

($\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ létezik inverz);

(+ asszociatív);

(+ kommutatív);

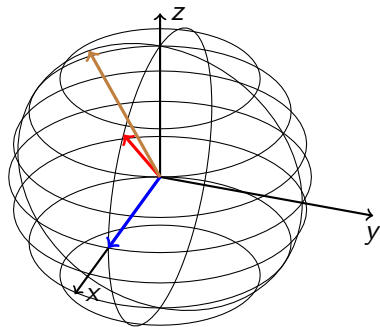
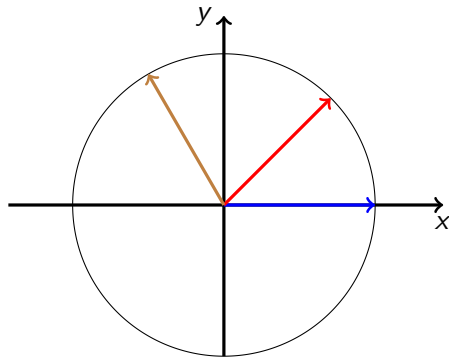
Skalárral való szorzás



$$2 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}; \quad -1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}$$

- ▶ $\forall \lambda, \mu, \mathbf{a} : (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ (asszociatív);
- ▶ $\forall \lambda, \mu, \mathbf{a} : (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (disztributív);
- ▶ $\forall \lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b} : \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (disztributív);
- ▶ $\forall \mathbf{a} : 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$

Abszolút érték



$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$$

► $\forall \mathbf{a} : |\mathbf{a}| \geq 0$ és $|\mathbf{a}| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$

(pozitivitás);

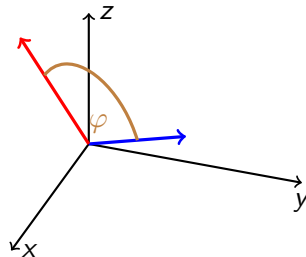
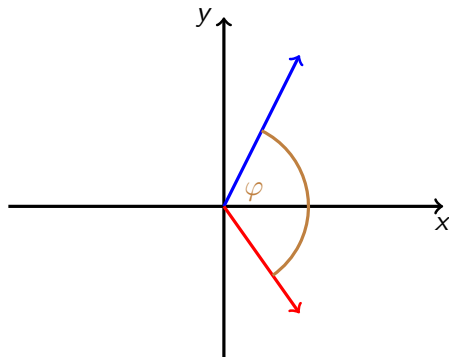
► $\forall \lambda, \mathbf{a} : |\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$

(pozitív homogenitás);

► $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} : |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

(háromszög egyenlőtlenség);

Skaláris szorzat



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$$

► $\forall \mathbf{a} : \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$

(pozitivitás);

► $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(szimmetria);

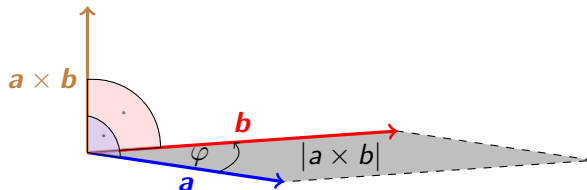
► $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} : (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

(additivitás);

► $\forall \lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b} : (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

(homogenitás);

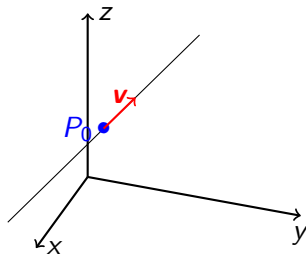
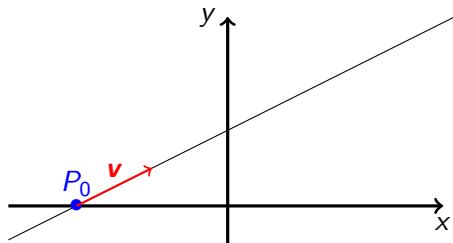
Vektoriális szorzat



$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b} \quad \text{és jobbkézszabály}$$

- ▶ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (ferde szimmetria);
- ▶ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} : (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (additivitás);
- ▶ $\forall \lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b} : (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (homogenitás);

Írányvektor



Az egyenes a pontjainak halmaza, azaz $\{P_0 + \lambda \mathbf{v} | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$, és $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$
jelöléssel

$$x = x_0 + \lambda v_1,$$

$$y = y_0 + \lambda v_2,$$

azaz $(x - x_0)v_2 = (y - y_0)v_1$, vagy másképp
 $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$.

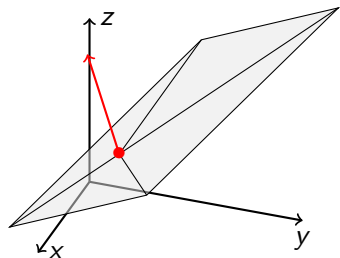
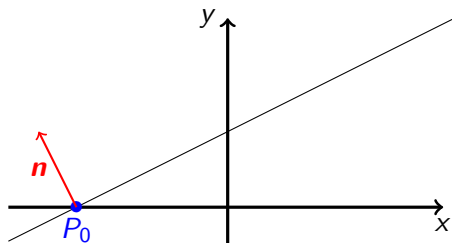
$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$, és
 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jelöléssel

$$x = x_0 + \lambda v_1,$$

$$y = y_0 + \lambda v_2,$$

$$z = z_0 + \lambda v_3.$$

Normálvektor



Az egyenes/sík a pontjainak halmaza, azaz $\{P \mid \overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}\}$.

$P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$, és $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ jelöléssel $(x - x_0, y - y_0) \mathbf{n} = 0$, azaz $(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 = 0$.

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$, és $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ jelöléssel $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \mathbf{n} = 0$, azaz $(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0$.

Vektortér, normált tér, belső szorzat tér

$\mathbb{V}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett, ha

- ▶ $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{V} : \forall \mathbf{a} \in \mathbb{V} : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ (létezik nullelem);
- ▶ $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V} : \exists \mathbf{b} \in \mathbb{V} : \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ létezik inverz);
- ▶ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V} : (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (+ asszociatív);
- ▶ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V} : \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (+ kommutatív);
- ▶ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{V} : (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ (asszociatív);
- ▶ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{V} : (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (disztributív);
- ▶ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V} : \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (disztributív);
- ▶ $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V} : 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$

Megjegyzés

Egy vektorteret **lineáris tér**nek is nevezhetünk.

Egy $\mathbb{R}$ feletti vektorteret **valós vektortér**nek is nevezhetünk.

Más test feletti vektorteret is értelmezhetnénk, de mi nem fogunk, ezért ha mást nem mondunk, akkor a vektortér mindig valós vektorteret jelent.

Példa (Vektortér)

A szokásos műveletekkel:

$$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \dots$$

Ha $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, akkor az $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ jelölést vezetjük be, ahol $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

A szokásos műveletek, ha $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, és $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \quad \text{illetve} \quad \lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n).$$

$$\mathcal{F}_A = \{f : A \rightarrow \mathbb{R}\}, \text{ ahol } A \text{ tetszőleges halmaz.}$$

Definíció

Ha $\mathbb{V}$ vektortér, $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ úgy, hogy $\mathbb{W}$ is vektortér az örökölt műveletekkel, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{W}$ (lineáris) **altér** $\mathbb{V}$ -nek.

Tétel (Altérkritérium)

Legyen $\mathbb{V}$ vektortér, és $\emptyset \neq \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$! $\mathbb{W}$ pontosan akkor altér $\mathbb{V}$ -nek, ha

$$\blacktriangleright \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{W} : \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{W};$$

$$\blacktriangleright \forall \mathbf{a} \in \mathbb{W}, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \mathbf{a} \in \mathbb{W};$$

Példa (Altér)

Legyen $A, I \subset \mathbb{R}$ úgy, hogy I intervallum!

$\mathbb{R}$ altér $\mathbb{C}$ -nek, vagy $\mathbb{R}^3$ -nak.

$\mathbb{R}^2$ vagy $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$ altér $\mathbb{R}^2$ -nek.

$\mathcal{C}_A = \mathcal{C}_A^0 = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\}$ altér $\mathcal{F}_A$ -nak.

$\mathcal{D}_I = \mathcal{D}_I^1 = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ deriválható}\}$ altér $\mathcal{F}_I$ -nek, és $\mathcal{C}_I^0$ -nek.

$\mathcal{C}_I^1 = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ folytonosan deriválható}\}$ altér $\mathcal{F}_I$ -nek, és $\mathcal{D}_I^1$ -nek.

$\mathcal{D}_I^2 = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ kétszer deriválható}\}$ altér $\mathcal{F}_I$ -nek, és $\mathcal{C}_I^1$ -nek.

Bázis

Tétel

Altérak metszete altér, azaz ha $\mathbb{V}$ vektortér, és $\mathbb{W}_i$ altere minden $i \in I$ esetén, akkor $\bigcap_{i \in I} \mathbb{W}_i$ is altere $\mathbb{V}$ -nek.

Definíció

Ha $\mathbb{V}$ vektortér, és $H \subset \mathbb{V}$, akkor a H által **generált altér**nek nevezzük és $\mathbb{L}(H)$ -val jelöljük az összes H -t tartalmazó altér metszetét.

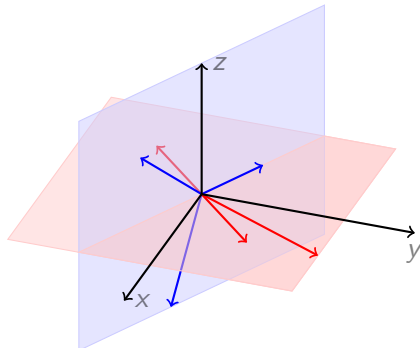
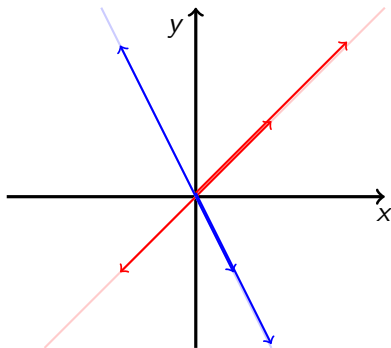
$$\mathbb{L}(H) = \bigcap \{ \mathbb{W} \mid \mathbb{W} \text{ altere } \mathbb{V}\text{-nek, és } H \subset \mathbb{W} \}$$

Megjegyzés

Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{V}$ véges, elemszáma $n \in \mathbb{N}^+$, és elemeit jelölje $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$! Ekkor a H által generált altér, a H elemeinek **lineáris kombináció**jaként előálló vektorokból áll.

$$\mathbb{L}(H) = \{ \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \}.$$

Továbbá $\mathbb{L}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.



Definíció

Ha $\mathbb{V}$ vektortér, és $H \subset \mathbb{V}$ úgy, hogy $\mathbb{L}(H) = \mathbb{V}$, akkor azt mondjuk, hogy H egy **generátorrendszer** $\mathbb{V}$ -nek.

Ha létezik $H \subset \mathbb{V}$ véges generátorrendszer, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{V}$ **véges dimenziós** vagy **végesen generált**.

Megjegyzés

$\mathbb{P}$ a polinomok vektortere ($\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ altere) nem véges dimenziós.

Definíció

Legyen $\mathbb{V}$ vektortér, $\emptyset \neq H \subset \mathbb{V}$ véges, elemszáma $n \in \mathbb{N}^+$, és elemeit jelölje $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$! Azt mondjuk, hogy H **lineárisan független**, ha $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

$\emptyset$ mindig **lineárisan független**.

$H \subset \mathbb{V}$ végtelen halmazt akkor nevezzük **lineárisan függetlennek**, ha bármely véges részhalmaza az.

Példa

$(1, 0)$ és $(1, 1)$ lineárisan független $\mathbb{R}^2$ -ben.

$1, x, x^2, x^3$ lineárisan független $\mathbb{P}$ -ben.

$\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ lineárisan független $\mathbb{P}$ -ben.

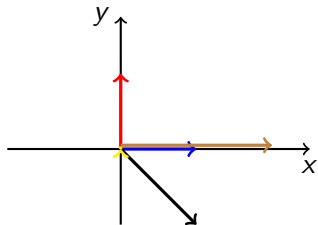
Definíció

Ha $\mathbb{V}$ vektortér, $H \subset \mathbb{V}$ lineárisan független generátorrendszer, akkor azt mondjuk, hogy H egy **bázisa** $\mathbb{V}$ -nek.

Feladat

Legyen $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{a} = (2, 0)$, $\mathbf{b} = (1, -1)$, $\mathbf{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$!

A $H = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{0}\}$ mely részhalmazai bázisok?



Tétel

Ha $\mathbb{V}$ vektortér, $A \subset \mathbb{V}$ lineárisan független, akkor létezik B bázis, melyre $A \subset B$.

Ha $\mathbb{V}$ vektortér, $A \subset \mathbb{V}$ generátorrendszer, akkor létezik B bázis, melyre $B \subset A$.

Tétel (Dimenziótétel)

Ha A és B bázisai $\mathbb{V}$ -nek, akkor számosságuk megegyezik.

Definíció

Ha $\mathbb{V}$ vektortér, akkor a bázisának számosságát a tér **dimenziójának** nevezzük, és $\dim \mathbb{V}$ -vel jelöljük.

Példa

$\dim\{\mathbf{0}\} = 0$, $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{C} = 2$.
 $\dim \mathbb{P} = \aleph_0$. Ez nem véges dimenzió.

Megjegyzés

A $\mathbb{V}$ vektortér pontosan akkor véges dimenziós, ha $\dim \mathbb{V} \in \mathbb{N}_0$.
Más jegyzetek más tételt hívnak dimenziótételnek.

Tétel

Ha $\mathbb{V}$ vektortér, és $B \subset \mathbb{V}$, akkor a következő állítások ekvivalensek:

1. B bázis.
2. B *maximális lineárisan független vektorrendszer*, azaz B lineárisan független, de ha $\mathbf{a} \in \mathbb{V} \setminus B$, akkor $B \cup \{\mathbf{a}\}$ már lineárisan függő.
3. B *minimális generátorrendszer*, azaz B generátorrendszer, de ha $\mathbf{a} \in B$, akkor $B \setminus \{\mathbf{a}\}$ már nem az.
4. Minden $\mathbf{a} \in \mathbb{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ esetén egyértelműen létezik $n \in \mathbb{N}^+$, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in B$ és $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, melyre $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n$.

Tétel

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $\mathbb{V}$ vektortér úgy, hogy $\dim \mathbb{V} = n$, és $B \subset \mathbb{V}$, akkor a következő állítások ekvivalensek:

1. B bázis.
2. B n -elemű és lineárisan független.
3. B n -elemű és generátorrendszer.
4. $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, és $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ esetén egyértelműen létezik $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, melyre $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n$.

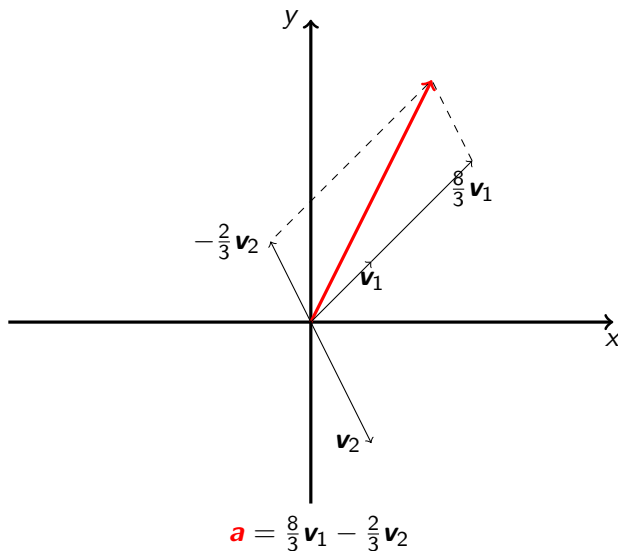
4 miatt bevezethetjük a következőt. Valójában ehhez rendezett bázis kell, vagyis a bázis elemeinek kell, hogy legyen sorrendje.

Definíció

Legyen $\mathbb{V}$ vektortér, $\dim \mathbb{V} = n$, $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ egy bázisa $\mathbb{V}$ -nek. Ekkor egy tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ B bázisra vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárokat, melyekre $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n$.

Példa

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ koordinátái az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ természetes bázisban 2 és 4, azaz $\mathbf{a} = (2, 4)$. Írjuk fel $\mathbf{a}$ koordinátáit az $\mathbf{v}_1 = (1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, -2)$ bázisban.



Definíció

Legyenek $\mathbb{V}$ és $\mathbb{W}$ vektorterek! A $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ függvényt **lineáris leképezésnek** nevezzük, ha

- ▶ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V} : \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b})$ (additív),
- ▶ $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \lambda \in \mathbb{R} : \varphi(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \varphi(\mathbf{a})$ (homogén).

Tétel (Lineáris leképezések alaptétele)

Ha $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ bázis $\mathbb{V}$ -ben, és $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{W}$ tetszőleges, akkor létezik pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineáris leképezés, melyre $\varphi(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

Definíció

Legyenek $\mathbb{V}$ és $\mathbb{W}$ vektorterek! Azt mondjuk, hogy $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ **izomorfizmus**, ha lineáris bijekció. Ha létezik $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ izomorfizmus, akkor a $\mathbb{V}$ és $\mathbb{W}$ vektortereket **izomorf**aknak nevezzük.

Tétel

Ha $\mathbb{V}$ és $\mathbb{W}$ vektorterek úgy, hogy $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W} \in \mathbb{N}_0$, akkor $\mathbb{V}$ és $\mathbb{W}$ izomorf.

Megjegyzés

Rögzített $n \in \mathbb{N}_0$ esetén minden n -dimenziós vektortér izomorf.

Legyenek $\mathbb{V}$ és $\mathbb{W}$ véges dimenziós vektorterek, és legyen $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bázis $\mathbb{V}$ -ben, illetve $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ bázis $\mathbb{W}$ -ben! Egy $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineáris leképezést megadhatunk úgy, hogy megadjuk $\varphi(\mathbf{v}_i)$ koordinátáit a $\mathbb{W}$ bázisában.

$$\begin{aligned}
 \varphi(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + a_{31}\mathbf{w}_3 + \dots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\
 \varphi(\mathbf{v}_2) &= a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + a_{32}\mathbf{w}_3 + \dots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\
 \varphi(\mathbf{v}_3) &= a_{13}\mathbf{w}_1 + a_{23}\mathbf{w}_2 + a_{33}\mathbf{w}_3 + \dots + a_{m3}\mathbf{w}_m \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\
 \varphi(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + a_{3n}\mathbf{w}_3 + \dots + a_{mn}\mathbf{w}_m
 \end{aligned}$$

$$\varphi \approx \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definíció

Legyenek $a_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq j \leq n$ esetén. Akkor az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

táblázatot $m \times n$ típusú **mátrix**nak nevezzük.

Az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{m \times n}$ módon jelöljük.

Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix **transzponált**jának nevezzük, és A^T -vel jelöljük az

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

mátrixot, melyet a sorok és oszlopok felcserélésével kapunk.

Mátrixok összege

Csak azonos típusú mátrixokat tudunk összeadni.

Definíció

$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Mátrixok skalárszorosa

Bármilyen mátrixot megszorozhatunk bármilyen skalárral.

Definíció

$\lambda \in \mathbb{R}$ és $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Megjegyzés

$\mathbb{R}^{m \times n}$ vektortér, méghozzá $m \cdot n$ dimenziós. $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = m \cdot n$.

Mátrixok szorzata

Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$, akkor az $A \cdot B$ szorzatot csak akkor tudjuk elvégezni, ha $n = k$.
Ekkor a szorzatra $C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times l}$ teljesül.

Definíció

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ esetén

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}}_{AB},$$

ahol

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \textcolor{red}{b_{12}} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & \textcolor{red}{b_{22}} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \textcolor{red}{b_{n2}} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{a_{11}} & \textcolor{red}{a_{12}} & \dots & \textcolor{red}{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \textcolor{red}{c_{12}} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \textcolor{red}{b_{12}} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & \textcolor{red}{b_{22}} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \textcolor{red}{b_{n2}} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \textcolor{red}{a_{21}} & \textcolor{red}{a_{22}} & \dots & \textcolor{red}{a_{2n}} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & \textcolor{red}{c_{22}} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \textcolor{red}{b_{12}} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & \textcolor{red}{b_{22}} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \textcolor{red}{b_{n2}} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \textcolor{red}{a_{31}} & \textcolor{red}{a_{32}} & \dots & \textcolor{red}{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & \textcolor{red}{c_{32}} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \textcolor{red}{b_{12}} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & \textcolor{red}{b_{22}} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \textcolor{red}{b_{n2}} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \textcolor{red}{a_{m1}} & \textcolor{red}{a_{m2}} & \dots & \textcolor{red}{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \textcolor{red}{c_{m2}} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Feladat

Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$!

Határozzuk meg az AB , BA , AA , BB mátrixokat!

Egy mátrixot **négyzetes** vagy **kvadrátikus** mátrixnak nevezünk, ha ugyanannyi sora van mint oszlopa. Ilyenkor a sorok számát, a **mátrix rendjének** nevezzük.

$\mathbb{R}^{n \times n}$ -ben a szorzás algebrai művelet, de nem olyan "jó", mint $\mathbb{R}$ -ben.

▶ asszociatív; (sőt, ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, és $C \in \mathbb{R}^{k \times l}$, akkor $A(BC) = (AB)C$.)

▶ **nem** kommutatív;

$$\left(\text{például } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

▶ létezik egységelem; $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ az $\mathbb{R}^{n \times n}$ -beli **egységmátrix**.
Azaz minden $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén $AE_n = E_n A = A$.

▶ **nem** minden (nullától különböző) elemnek van (multiplikatív) **inverze**;

$$\left(\text{például nem létezik } B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ amire } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot B = E_2 \text{ teljesülne.} \right)$$

▶ $\cdot$ disztributív +-ra; (sőt, ha $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times k}$, és $D \in \mathbb{R}^{k \times m}$, akkor $(A + B)C = AC + BC$, illetve $D(A + B) = DA + DB$.)

Megjegyzés

Az 1×1 -es mátrixok halmazán persze a szorzás mindent tud.

Vizsgáljuk a $\left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ halmazt. Ez egy altere $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -nek, hiszen nem vezet ki belőle az összeadás (és a skalárral való szorzás).

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}$$

Ha az $a + bi$ komplex számnak megfeleltetjük a $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ mátrixot, akkor a fenti halmaz izomorf $\mathbb{C}$ -vel (testizomorfizmus).

Megjegyzés

A vektorok is megfeleltethetők a speciális mátrixoknak.

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}^T \text{ megfeleltetéssel } \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezésnek megfeleltettük az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ mátrixot. Ekkor

$$\varphi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Determináns

Definíció (Leibniz formula)

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix **determinánsának** nevezzük és $\det A$ vagy $|A|$ módon jelöljük a

$$\det A = \sum_{\pi \in P_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

számot, ahol $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, P_n az $(1, \dots, n)$ elemek permutációinak halmaza, míg $I(\pi)$ a π permutációbeli inverziók száma.

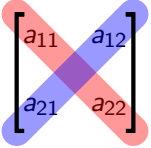
Feladat

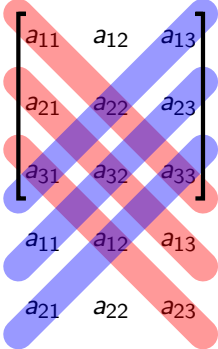
$$\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

Megjegyzés (Sarrus-szabály)

Csak másod- és harmadrendű mátrix esetén!

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$
A diagram of a 2x2 matrix with elements a_{11} , a_{12} , a_{21} , and a_{22} . A red diagonal band runs from the top-left to the bottom-right, passing through a_{11} and a_{22} . A blue diagonal band runs from the top-right to the bottom-left, passing through a_{12} and a_{21} .

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$
A diagram of a 3x3 matrix with elements a_{11} through a_{33} . Three red diagonal bands run from the top-left to the bottom-right, passing through (a_{11}, a_{22}, a_{33}) , (a_{21}, a_{32}, a_{13}) , and (a_{31}, a_{12}, a_{23}) . Three blue diagonal bands run from the top-right to the bottom-left, passing through (a_{13}, a_{22}, a_{31}) , (a_{23}, a_{32}, a_{11}) , and (a_{33}, a_{12}, a_{21}) .

Tétel (Determináns tulajdonságai)

- ▶ Ha egy sor minden eleme 0, akkor a determináns is 0.
- ▶ Két sor felcserélésével a determináns (-1) -szerezése változik.
- ▶ Ha két sor megegyezik, akkor a determináns 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1n} \\ b_1 + c_1 & \dots & b_n + c_n \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1n} \\ b_1 & \dots & b_n \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1n} \\ c_1 & \dots & c_n \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- ▶ Ha egy sorát szorozzuk egy skalárral, akkor a determináns is szorozódik.
- ▶ A determináns értéke nem változik, ha egy sorához hozzáadjuk egy másik sorának skalárszorosát.
- ▶ A transzponálás nem változtatja meg a determinánst.
- ▶ Sorok helyett oszlopokra is igaz.

Az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & \mathbf{a_{1j}} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & \mathbf{a_{i-1j}} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ \mathbf{a_{i1}} & \dots & \mathbf{a_{ij-1}} & \mathbf{a_{ij}} & \mathbf{a_{ij+1}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & \mathbf{a_{i+1j}} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & \mathbf{a_{nj}} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix a_{ij} eleméhez tartozó **aldetermináns**ának nevezzük az i -edik sor, és a j -edik oszlop letakarásával kapott mátrix determinánsát.

$$D_{ij} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tétel (Determináns kifejtése az i -edik sor szerint (Laplace formula))

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $i \in \{1, \dots, n\}$ rögzített, akkor

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}.$$

Feladat

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

Megjegyzés

Hasonlóan oszlop szerinti kifejtés is lehet.

Definíció

Az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix a_{ii} elemeit ($i = 1, \dots, n$) **főátlónak** hívjuk.

Azt mondjuk, hogy az A mátrix

- ▶ **diagonális**, ha a főátlón kívüli elemek 0-k, azaz $a_{ij} = 0$ minden $1 \leq i, j \leq n$ és $i \neq j$ esetén;
- ▶ **felső háromszög alakú**, ha a főátló alatti elemek 0-k, azaz $a_{ij} = 0$ minden $1 \leq j < i \leq n$ esetén;
- ▶ **alsó háromszög alakú**, ha a főátló feletti elemek 0-k, azaz $a_{ij} = 0$ minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén.

Tétel

Háromszög alakú mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

Gauss-elimináció

- ▶ Egy sorhoz adjuk egy másik sor tetszőleges skalárszorosát.
- ▶ Egy sort szorozzunk egy nem 0 skalárral (a determináns is szorzódik).
- ▶ Sorok cseréje (a determináns előjele megváltozik).

Egy tetszőleges négyzetes mátrixot alakítsunk át felső háromszög alakúvá úgy, hogy közben ne változzon a determinánsa (esetleg az előjele).

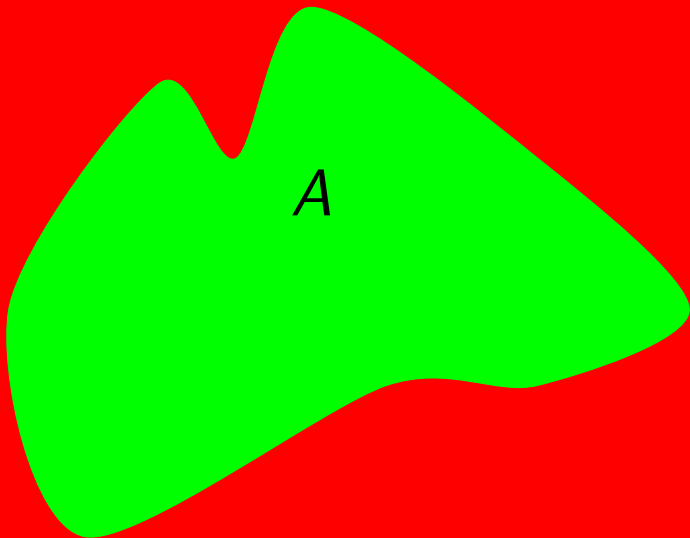
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

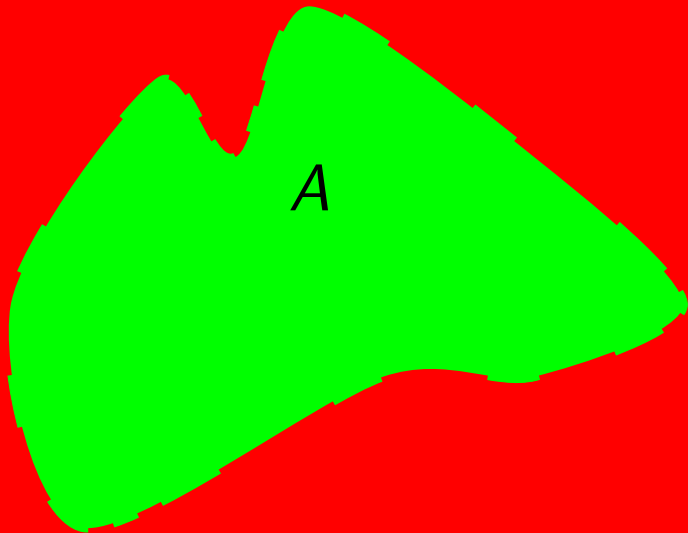
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

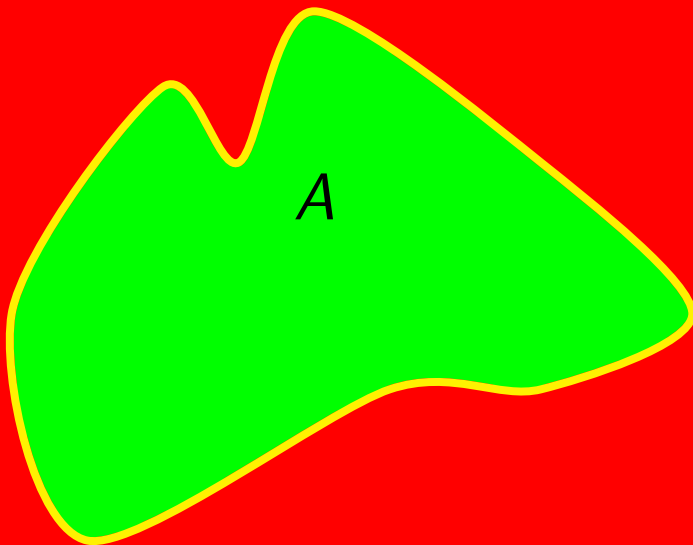
$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -6 \\ -7 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \\ -5 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$









Definíció (Topologikus tér)

Az $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ párt **topologikus térnek**, a $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$ halmazrendszert $\mathbb{X}$ -en adott **topológiának**, a $\mathcal{T}$ elemeit pedig **nyílt halmazoknak** nevezzük, ha

- ▶ $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{T} : \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$ (nyílt halmazok uniója nyílt);
- ▶ $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ véges : $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{T}$ (véges sok nyílt halmaz metszete nyílt);

Azt mondjuk, hogy $A \subset \mathbb{X}$ **zárt halmaz**, ha komplementere ($\bar{A} = \mathbb{X} \setminus A$) nyílt.

Megjegyzés

A de Morgan azonosság miatt zárt halmazok metszete, és véges sok zárt halmaz uniója is zárt. Mivel $\emptyset \subset \mathcal{T}$ véges és $\bigcup \emptyset = \emptyset$ míg $\bigcap \emptyset = \mathbb{X}$, ezért $\emptyset$ és $\mathbb{X}$ egyszerre nyílt és zárt.

Példa

- ▶ $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{X}\}$ az **indiszkkrét topológia** az $\mathbb{X}$ halmazon.
- ▶ $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{X})$ a **diszkkrét topológia** az $\mathbb{X}$ halmazon.
- ▶ $\mathbb{R}$ -n nyílt halmazok a nyílt intervallumok és minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $]a, \infty]$ illetve $[-\infty, a[$ halmazok, illetve ezek tetszőleges uniója.
- ▶ Később definiáljuk az **euklideszi topológiát** $\mathbb{R}^n$ -en.

Fogalmak:

Az $A \subset \mathbb{X}$ **halmaz belseje** az A legbővebb nyílt részhalmaza:

$$\text{int } A = \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset A\}$$

Az $A \subset \mathbb{X}$ **halmaz külseje** a komplementer belseje:

$$\text{ext } A = \text{int } \bar{A}$$

Az $A \subset \mathbb{X}$ **halmaz határa**

$$\text{fr } A = \overline{(\text{int } A) \cup (\text{ext } A)}$$

Az $A \subset \mathbb{X}$ **halmaz lezártja** a külsejének komplementere:

$$\text{cl } A = \overline{\text{ext } A}$$

Pontok: **torlódási pont**, **izolált pont**, **környezet**, ...

Halmazok: **kompakt halmaz**, **összefüggő halmaz**, ...

Függvényeknél: **határérték**, **folytonosság**, ...

~~korlátosság, teljesség, egyenletes folytonosság, derivált, monotonitás, ...~~

Tételek:

$\text{int } A$ és $\text{ext } A$ mindig nyílt, $\text{cl } A$ és $\text{fr } A = \text{cl } A \setminus \text{int } A$ mindig zárt.

$\text{int } A \subset A \subset \text{cl } A$, $\text{fr } \bar{A} = \text{fr } A$, $\text{cl } A = \text{int } A \cup \text{fr } A$,

$\text{int } A$, $\text{ext } A$ és $\text{fr } A$ páronként diszjunkt, $\text{int } A \cup \text{fr } A \cup \text{ext } A = \mathbb{X}$,

U nyílt $\iff U = \text{int } U \iff \bar{U} = \text{cl } \bar{U} \iff \bar{U}$ zárt

$\text{cl } A = \bigcap \{V \subset \mathbb{X} : V \text{ zárt, } A \subset V\}$ a legszűkebb zárt halmaz, ami tartalmazza A -t.

Kompakt halmaz folytonos képe kompakt (Weierstrass-tétel).

Összefüggő halmaz folytonos képe összefüggő (Bolzano-tétel).

Definíció (Metrikus tér)

Az $(\mathbb{X}, d)$ párt **metrikus térnek**, a $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt pedig $\mathbb{X}$ -en adott **metrikának** nevezzük, ha

- ▶ $\forall x, y \in \mathbb{X} : d(x, y) \geq 0$ és $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (pozitivitás);
- ▶ $\forall x, y \in \mathbb{X} : d(x, y) = d(y, x)$ (szimmetria);
- ▶ $\forall x, y, z \in \mathbb{X} : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (háromszög egyenlőtlenség);

Következmény

- ▶ $\forall x, y, z \in \mathbb{X} : |d(x, z) - d(x, y)| \leq d(y, z)$ (fordított háromszög egyenlőtlenség)

Definíció (Metrika által indukált topológia)

Az $(\mathbb{X}, d)$ metrikus tér esetén értelmezzük egy tetszőleges $a \in \mathbb{X}$ pont tetszőleges $\varepsilon > 0$ sugarú gömbkörnyezetét így

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{X} \mid d(a, x) < \varepsilon\}$$

Azt mondjuk, hogy az $a \in \mathbb{X}$ **belső pontja** az $A \subset \mathbb{X}$ halmaznak, ha létezik $\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A$. Az $U \subset \mathbb{X}$ halmazt **nyílt**nek nevezzük, ha minden pontja belső pont.

Tétel

Az imént definiált nyílt halmazok topológiát határoznak meg $\mathbb{X}$ -en.

Példa

- ▶ **diszkrét metrika** az, amire $x \neq y \implies d(x, y) = 1$. Ez a diszkrét topológiát generálja.
- ▶ Az indiszkrét topológiához nem tartozik metrika, ha $\mathbb{X}$ legalább 2 elemű.
- ▶ Terjesszük ki a th függvényt $\overline{\mathbb{R}}$ -re úgy, hogy $\text{th } \pm\infty = \pm 1$. Ekkor $d(x, y) = |\text{th } x - \text{th } y|$ metrika $\overline{\mathbb{R}}$ -n, mely a korábban látott topológiát generálja.
- ▶ A később definiált **Euklideszi metrika** és más **p -metrikák** az euklideszi topológiát generálják.

Az $(\mathbb{X}, d)$ metrikus térben értelmezhetjük a korlátosságot.

Definíció (Korlátos halmaz)

Az $(\mathbb{X}, d)$ metrikus tér A részhalmazát **korlátosnak** nevezzük, ha létezik $a \in \mathbb{X}$ és $r > 0$ úgy, hogy $A \subset B_r(a)$.

Megjegyzés

Ha $A \subset \mathbb{X}$ korlátos, akkor bármely $b \in \mathbb{X}$ esetén létezik $s > 0$, amire $A \subset B_s(b)$.

Tétel

Ha $a \in \mathbb{X}$ és $\varepsilon > 0$, akkor $B_\varepsilon(a)$ korlátos és nyílt.

Következmény

A metrikus tereknél definiált (114) belső pontok halmaza megegyezik a topologikus tereknél definiált (113) belső résszel.

Definíció (Sorozatok határértéke)

Egy $x : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{X}$ függvényt $\mathbb{X}$ -beli **sorozatnak** (röviden **sorozatnak**) nevezünk.

Azt mondjuk, hogy az x_n sorozat **korlátos**, ha értékkészlete korlátos.

Azt mondjuk, hogy az x_n sorozat **konvergens** és **határértéke** $a \in \mathbb{X}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^+ : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies x_n \in B_\varepsilon(a).$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim x_n = a \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{vagy} \quad x_n \rightarrow a.$$

Ha az x_n sorozat nem konvergens, akkor **divergensnek** nevezzük.

Tétel (A határérték egyértelmű)

Ha $\lim x_n = a$, és $\lim x_n = b$, akkor $a = b$.

Tétel (Konvergenca szükséges feltétele)

Ha az x_n sorozat konvergens, akkor korlátos.

Definíció (Cauchy-sorozat, teljes metrikus tér)

Azt mondjuk, hogy az x_n sorozat **Cauchy-sorozat**, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $N \in \mathbb{N}^+$ küszöb, melyre $n, k > N$ esetén

$$d(x_n, x_k) < \varepsilon.$$

Teljes metrikus térnek nevezzük a teret, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

Tétel

Egy metrikus térben minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.

Következmény

Egy teljes metrikus térben egy sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Definíció (Részsorozat, torlódási pont)

Ha $\alpha(n)$ egy $\mathbb{N}^+$ -beli szigorúan monoton növő sorozat, akkor azt mondjuk, hogy az $x_{\alpha(n)}$ sorozat az x_n egy **részsorozata**.

Az $a \in \mathbb{X}$ pontot x_n sorozat **torlódási pontjának** nevezzük, ha létezik olyan $x_{\alpha(n)}$ részsorozat, melynek határértéke a .

Tétel

$a \in \mathbb{X}$ pontosan akkor torlódási pontja az x_n sorozatnak ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van a sorozatnak végtelen sok $B_\varepsilon(a)$ -beli eleme.

Definíció (Normált tér)

Ha $\mathbb{V}$ vektortér, akkor a $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ párt **normált térnek**, a $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt pedig $\mathbb{V}$ -n adott **normának** nevezzük, ha

- ▶ $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V} : \|\mathbf{x}\| \geq 0$ és $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (pozitivitás);
- ▶ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{V} : \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$ (pozitív homogenitás);
- ▶ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V} : \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (háromszög egyenlőtlenség);

Következmény

- ▶ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V} : ||\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (fordított háromszög egyenlőtlenség)

Normából származó metrika.

Tétel

$(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ metrika $\mathbb{V}$ -n.

Megjegyzés

$\mathbb{V}$ vektortéren adott d metrika pontosan akkor származik normából, ha

- ▶ $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{z})$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$ esetén;
- ▶ $d(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{0}) = |\lambda|d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ esetén.

Ekkor

- ▶ $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z})$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$ esetén;
- ▶ $d(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = |\lambda|d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ esetén.

Következmény

Normából topológia is származik.

$\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ vektortéren minden normából ugyanaz a topológia származik, vagyis ugyanazok a halmazok lesznek nyíltak.

Megjegyzés (Abszolút érték)

Az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ abszolút értéke, vagy L_2 normája, vagy euklideszi normája legyen

$$|\mathbf{x}| = \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, akkor $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ L_2 normája legyen

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Példa (Más normák)

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, és $p \in [1, \infty[$ esetén az L_p norma

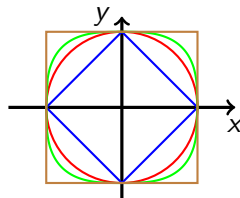
$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p},$$

illetve

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

is norma.

Az egységkör $\mathbb{R}^2$ -ben L_1 , L_2 , L_3 és L_∞ normák esetén:



Tétel (Határérték és műveletek (sorozatok))

Ha az $\mathbf{x}_k$ és $\mathbf{y}_k \in \mathbb{V}$ normált térbeli sorozatok konvergensek és $c \in \mathbb{R}$, akkor $(\mathbf{x}_k \pm \mathbf{y}_k)$ és $(c \cdot \mathbf{x}_k)$ is az. Továbbá, ha

$$\mathbf{a} = \lim \mathbf{x}_k \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \lim \mathbf{y}_k,$$

akkor

$$\lim(\mathbf{x}_k \pm \mathbf{y}_k) = \mathbf{a} \pm \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \lim(c \cdot \mathbf{x}_k) = c \cdot \mathbf{a}.$$

Következmény

Ha $\mathbf{x}_k \in \mathbb{V}$ normált térbeli sorozat és $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$, akkor

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{0} \iff \|\mathbf{x}_k\| \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a} \iff (\mathbf{x}_k - \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{0} \implies \|\mathbf{x}_k\| \rightarrow \|\mathbf{a}\|.$$

Definíció (Belső szorzat tér)

A $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt **belső szorzat térnek**, a $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt pedig $\mathbb{V}$ -n adott **belső szorzatnak** nevezzük, ha

- ▶ $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ és $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (pozitivitás);
- ▶ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ (szimmetria);
- ▶ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V} : \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ (additivitás);
- ▶ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V} : \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ (homogenitás);

Megjegyzés (Skaláris szorzat)

Az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata**, legyen

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Ha $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, akkor $f, g \in \mathcal{C}_I$ **skaláris szorzata**, legyen

$$fg = \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) \, dx.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy mindkettő belső szorzat.

Tétel (Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség)

Ha $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ egy belső szorzat tér, és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$, akkor

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

- ▶ $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, vagy $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (ilyenkor $0 = 0$);
- ▶ létezik $\lambda \neq 0$, amire $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ (ilyenkor $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \text{sgn}(\lambda) \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$).

Tétel (Indukált norma)

Ha $\langle \cdot, \cdot \rangle$ egy belső szorzat a $\mathbb{V}$ vektortéren, akkor az

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{V})$$

egy norma $\mathbb{V}$ -n.

Megjegyzés

A skaláris szorzat az abszolút értéket azaz az L_2 normát indukálja.

Következmény (Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség)

Ha $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ egy belső szorzat tér, $\| \cdot \|$ az indukált norma, és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$, akkor

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

- ▶ $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, vagy $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (ilyenkor $0 = 0$);
- ▶ létezik $\lambda \neq 0$, amire $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ (ilyenkor $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \text{sgn}(\lambda) \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$).

Definíció

Ha $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ egy belső szorzat tér, $\| \cdot \|$ az indukált norma, és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$, akkor nevezzük a két vektor által **bezárt szög**nek az $\arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}\right)$ értéket.

Azt mondjuk, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ **ortogonális**, ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Megjegyzés (Pitagorasz-tétel)

Legyen $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ egy belső szorzat tér, $\| \cdot \|$ az indukált norma, és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$. Ekkor

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

Tétel

A $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ normált tér pontosan akkor származik belső szorzat térből ha teljesül a paralelogramma-szabály, azaz minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ esetén

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2 \left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \right).$$

Következmény

Ha $n \geq 2$ és $p \in [1, 2[$ vagy $p \in]2, \infty[$ vagy $p = \infty$, akkor a p -norma nem származik belső szorzatból.

Tétel (Határérték és belső szorzat (sorozatok))

Ha az $\mathbf{x}_k$ és $\mathbf{y}_k \forall$ belső szorzat térbeli sorozatok konvergensek, akkor $\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \rangle$ számsorozat is konvergens. Továbbá, ha

$$\mathbf{a} = \lim \mathbf{x}_k \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \lim \mathbf{y}_k,$$

akkor

$$\lim \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

$\mathbb{R}^n$ -en, azaz bármely véges dimenziós valós vektortéren a következőképpen származnak egymásból topológiai struktúrák (jobbról balra).

Topológikus tér	Metrikus tér	Normált tér	Belső szorzat tér
euklideszi topológia	euklideszi metrika	euklideszi norma	skaláris szorzat
	más belső szorzatból származó metrikák	más belső szorzatból származó normák	más belső szorzatok
	más p -metrikák	más p -normák	
	más normából származó metrikák	más nem belső szorzatból származó normák	
	nem normából származó metrikák		
más metrízálható topológiák	más nem normából származó metrikák		
nem metrízálható topológiák			

Mostantól csak véges dimenziós valós vektortérben dolgozunk, azaz valamilyen $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\mathbb{R}^n$ lesz az alaphalmaz, amit nem mindig írunk ki.

Mindig a szokásos skaláris szorzatot használjuk, amit legtöbbször egyszerűen így

$\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ jelölünk, de néha így $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Mindig az ebből származó normát vagyis az abszolút értéket, L_2 , euklideszi normát vesszük, amit így jelölünk: $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Szintén mindig az ebből származó euklideszi metrikus térben dolgozunk, és $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ helyett az $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ jelölést alkalmazzuk.

Végül mindig az ezekből származó topológiát (normatopológia) használjuk vagyis a nyílt halmazokat eszerint értelmezzük.

- **Gömbkörnyezet:** Minden $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{a}$ ε sugarú gömbkörnyezete

$$B_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}.$$

Ha ε -nak nincs jelentősége, röviden $B(\mathbf{a})$ -val is jelöljük.

$n = 1$ esetén $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ nyílt intervallum;

$n = 2$ esetén $\mathbf{a}$ középpontú ε sugarú nyílt körlap;

$n = 3$ esetén $\mathbf{a}$ középpontú ε sugarú nyílt gömb;

$n > 3$ esetén n dimenziós $\mathbf{a}$ középpontú ε sugarú nyílt gömb.

- **Átszúrt gömbkörnyezet:** Minden $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{a}$ ε sugarú átszúrt vagy lyukas gömbkörnyezete

$$\dot{B}_\varepsilon(\mathbf{a}) = B_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}.$$

- **Belső pont:** Az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ az $A \subset \mathbb{R}^n$ belső pontja, ha létezik $\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$.
- **Külső pont:** Az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ az $A \subset \mathbb{R}^n$ külső pontja, ha létezik $\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap A = \emptyset$.
- **Határpont:** Az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ -et az $A \subset \mathbb{R}^n$ határpontjának nevezzük, ha se nem belső pontja, se nem külső pontja, azaz ha minden $\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\mathbf{a}) \not\subset A$ és $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap A \neq \emptyset$.

- ▶ **int A :** A belseje, azaz A belső pontjainak halmaza. Tétel: $A \supset \text{int } A = \text{cl } A \setminus \text{fr } A$
- ▶ **ext A :** A külseje, azaz A külső pontjainak halmaza. Tétel: $\text{ext } A = \text{int } \overline{A} \subset \overline{A}$.
- ▶ **cl A :** A lezártja, azaz A belső pontjainak és határpontjainak halmaza. Másképpen azon pontok halmaza, melyek nem külső pontok. Tétel: $A \subset \text{cl } A = \overline{\text{ext } A} = \text{int } A \cup \text{fr } A$
- ▶ **fr A :** A határa, azaz A határpontjainak halmaza. Tétel: $\text{fr } A = \text{cl } A \setminus \text{int } A = \text{fr } \overline{A}$.
- ▶ **Torlódási pont:** $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ **torlódási pontja** az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaznak, ha minden

$$\varepsilon > 0 : \dot{B}_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap A \neq \emptyset.$$

A torlódási pontjainak halmazát **A deriválthalmazának** is nevezzük, és használjuk rá az **A'** jelölést.

$$\text{Tétel: } \text{int } A \subset A' \subset \text{cl } A, \text{fr } A \subset A \cup A', \text{ext } A \cap A' = \emptyset$$

- ▶ **Nyílt halmaz:** $A \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, ha minden pontja belső pont, azaz

$$\text{int } A = A.$$

- ▶ **Zárt halmaz:** $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt, ha minden határpontja eleme, azaz

$$\text{cl } A = A.$$

$$\text{Tétel: } A \text{ nyílt} \iff \overline{A} \text{ zárt}, A \text{ zárt} \iff \overline{A} \text{ nyílt}, A \text{ zárt} \iff A' \subset A$$

Tétel: egyszerre nyílt és zárt halmaz (**clopen set**) csak az egész tér és az üres halmaz.

- ▶ **Korlátos halmaz:** Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz korlátos, ha létezik $\varepsilon > 0$, melyre

$$A \subset B_\varepsilon(\mathbf{0}).$$

- ▶ **Kompakt halmaz:** $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, ha korlátos és zárt.

Tétel

Ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, és $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, akkor

$$|x_{i_0}| \leq \max_i |x_i| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_i |x_i|,$$

és

$$|x_{i_0} - y_{i_0}| \leq \max_i |x_i - y_i| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \sum_i |x_i - y_i|.$$

Következmény

Legyen $A_i \subset \mathbb{R}$ az $A \subset \mathbb{R}^n$ elemeinek i -edik koordinátájából álló halmaz minden $i = 1, \dots, n$ esetén, azaz $\forall i \in \{1, \dots, n\} : A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{a} \in A : x = a_i\}$! Ekkor $A \subset \mathbb{R}^n$ pontosan akkor korlátos, ha A_i korlátos minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

Megjegyzés

Ha a fenti $A \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, akkor $A_i \subset \mathbb{R}$ is nyílt minden i -re.

Definíció

Az $\mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt n -dimenziós **pontsorozatnak**, vagy **vektorsorozatnak** nevezzük.

A számsorozatoknál megszokott módon a sorozat k -adik elemére az $\mathbf{x}(k)$ helyett az $\mathbf{x}_k$ jelölést használjuk, és ha ez nem okoz félreértést a sorozatot is $\mathbf{x}_k$ -val jelöljük.

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ esetén azt mondjuk, hogy $\mathbf{x}_k$ **konvergens**, és **határértéke** $\mathbf{a}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : k > N(\varepsilon) \implies \mathbf{x}_k \in B_\varepsilon(\mathbf{a}).$$

Ezt úgy is mondjuk, hogy $\mathbf{x}_k$ **tart** $\mathbf{a}$ -hoz, és az alábbi módokon jelöljük.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}, \quad \lim \mathbf{x}_k = \mathbf{a}, \quad \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$$

A következő tétel miatt a pontsorozatok konvergenciáját mindig visszavezethetjük számsorozatok konvergenciájának vizsgálatára, így ezzel nem kell külön foglalkoznunk.

Tétel (Koordinátánkénti konvergencia)

Ha $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ pontsorozat, és $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{a} \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lim x_{ki} = a_i.$$

Feladat

Mi a határértéke az

$$\left(\left(1 + \frac{2}{k} \right)^k, \frac{2k^2 - 1}{k^2 + 1} \right)$$

sorozatnak?

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ -beli **sorozat korlátos** ha értékkészlete korlátos.

Tétel

- ▶ Az $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ -beli sorozat pontosan akkor korlátos, ha minden koordináta sorozata korlátos.
- ▶ Konvergens sorozat korlátos.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}_k$ $\mathbb{R}^n$ -beli sorozat **Cauchy-sorozat**, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^+ : k, m > N \implies |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| < \varepsilon.$$

Tétel

- ▶ Az $\mathbf{x}_k$ $\mathbb{R}^n$ -beli sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat ha minden koordináta sorozata Cauchy-sorozat.
- ▶ Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat. Minden Cauchy-sorozat korlátos.
- ▶ $\mathbb{R}^n$ teljes, azaz minden Cauchy-sorozat konvergens.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}_k$ $\mathbb{R}^n$ -beli **sorozat torlódási pontja** $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, ha valamely részsorozatának határértéke.

Tétel

- ▶ Az $\mathbf{x}_k$ $\mathbb{R}^n$ -beli sorozat torlódási pontja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pontosan akkor, ha $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\mathbf{a})$ tartalmazza a sorozat végtelen sok elemét.
- ▶ Az $\mathbf{x}_k$ $\mathbb{R}^n$ -beli sorozat torlódási pontja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pontosan akkor, ha torlódási pontja a sorozat értékkészletének vagy végtelen sok k -ra teljesül, hogy $\mathbf{x}_k = \mathbf{a}$.
- ▶ Ha $\mathbf{x}_k$ $\mathbb{R}^n$ -beli sorozat torlódási pontja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, akkor minden koordinátasorozatának torlódási pontja $\mathbf{a}$ megfelelő koordinátája.

Igazak a következő tételek általánosításai:

Tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel (sorozat))

Ha $\mathbf{x}_k$ $\mathbb{R}^n$ -beli sorozat korlátos, akkor van torlódási pontja.

Tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel (halmaz))

$\mathbb{R}^n$ korlátos, végtelen elemű részhalmazának mindig van torlódási pontja.

Tétel (Cantor-féle metszet-tétel)

$\mathbb{R}^n$ egymásba skatulyázott, nem üres, kompakt részhalmazából álló sorozat metszete nem üres.

Definíció

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$, akkor az

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

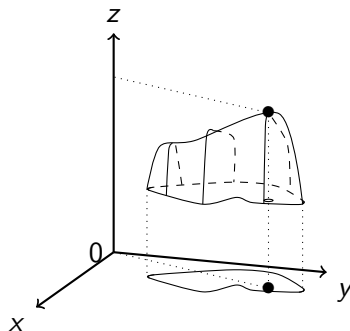
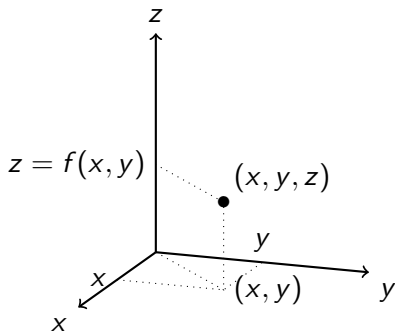
függvényt n -változós függvénynek nevezzük.

A függvény értékkészlete is lehetne többdimenziós, azaz többértékű (vektor értékű) függvényekről is beszélhetnénk, de többnyire csak egyértékű (valós értékű) függvényekről lesz szó. Ha mást nem mondunk, f n -változós (valós értékű) függvényt jelöl.

A vektor változós, valós értékű függvények közül fontos a kétváltozós függvények vizsgálata. Ezeket szemléltetni is tudjuk az alábbi módokon.

Ahogy az egyváltozós (egyértékű) függvényt egy görbeként ábrázolhattuk, a kétváltozós függvényt egy felülettel szemléltethetjük, ha elég 'sima'. Ezt a H_0 felületet f grafikonjának nevezzük:

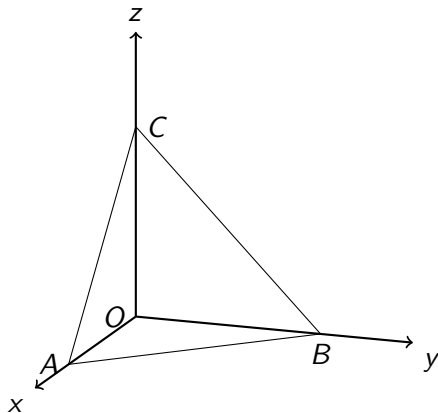
$$H_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \text{Dom}_f, z = f(x, y)\} = \text{graf } f.$$



Például az $f(x, y) = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ függvény grafikonja a $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ felület, azaz

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

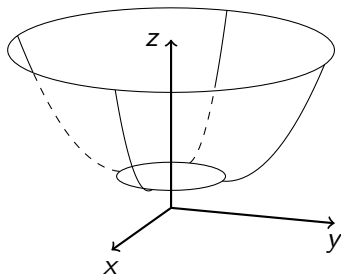
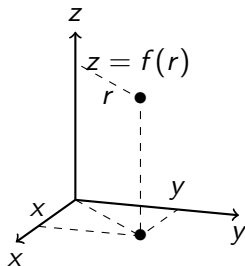
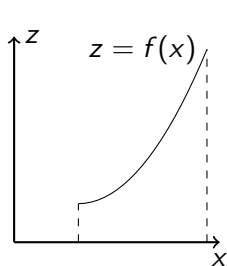
tehát egy olyan síkról van szó, amely az x, y, z tengelyeket rendre az $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$, $C = (0, 0, c)$ pontokban metszi.



Ha megforgatjuk az (x, z) síkban lévő $z = f(x)$ görbét a z tengely körül, akkor a

$$z = f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

felülethez jutunk.



Másik lehetőség többváltozós függvény szemléltetésére a szintalakzatok ábrázolása.

Definíció

Szintalakzatnak nevezzük azon Dom_f -beli pontok halmazát, melyekhez f ugyanazt az értéket rendeli.

Megjegyzés

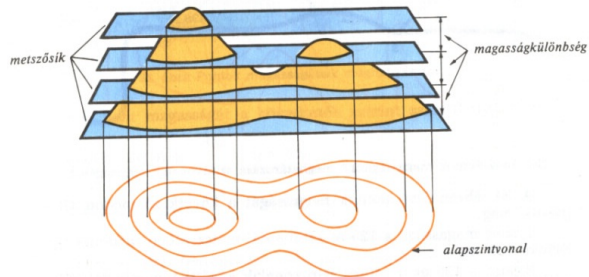
Az értékkészlet minden eleméhez tartozik tehát egy szintalakzat. Ha például $c \in \text{Ran}_f$, akkor a hozzátartozó szintalakzat

$$\{\mathbf{x} \in \text{Dom}_f : f(\mathbf{x}) = c\}.$$

A függvény egy szintalakzaton tehát állandó.

Kétváltozós függvény esetén a rögzített $z \in \text{Ran}_f$ -hez tartozó szintalakzat a $z = f(x, y)$ egyenlet megoldásainak halmaza. Ha f elég sima, akkor a szintalakzat egy vagy több görbe az (x, y) síkon, ezért kétváltozós esetben a szintalakzatokat szintvonalaknak hívjuk. Hasonlóan háromváltozós függvény esetén szintfelületről beszélünk.

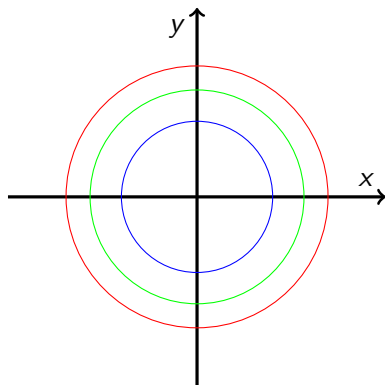
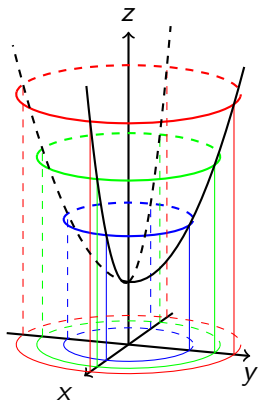
Szintvonalakat láthatunk egy domborzati térképen, lásd a
'<http://mercator.elte.hu/deszter/mapinfofyak>' oldalról átvett ábrán.



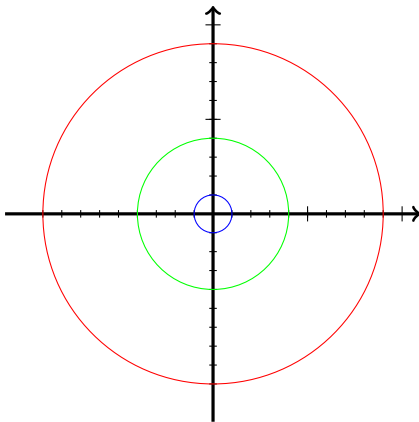
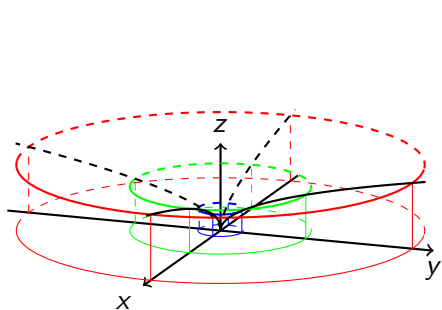
Például a $z = x^2 + 1$ görbének a z tengely körüli megforgatásával a

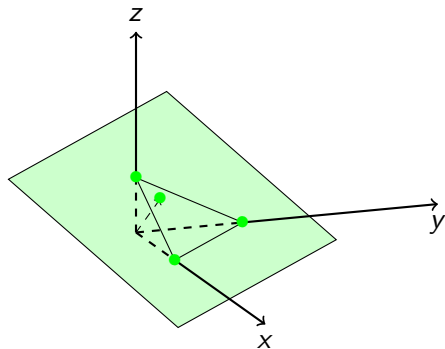
$$z = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + 1 = x^2 + y^2 + 1$$

felülethez jutunk (forgási paraboloid). Mivel z tengely körüli forgástest, így szintvonalai origó középpontú körök lesznek. A $z = 1$ -hez tartozó szintvonal egyetlen pont, $z < 1$ -hez nem tartozik szintvonal, mert $\text{Ran}_f = [1, \infty)$. A $z = 1, 2, 3, 4$ -hez tartozó szintvonalak láthatók.

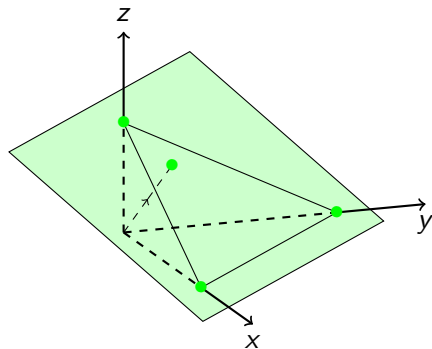


Az $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ grafikonja a $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ felület, ami a $z = \sqrt{x}$ görbe z tengely körüli forgatásával keletkezett. A $z = 0$ -hoz tartozó szintvonal egyetlen pont, negatív z -hez nem tartozik szintvonal, mert $\text{Ran}_f = [0, \infty)$, és pozitív z esetén a szintvonal egy origó középpontú kör. Az ábrákon a $z = 0, 1, 2, 3$ -hoz tartozó szintvonalak láthatók.

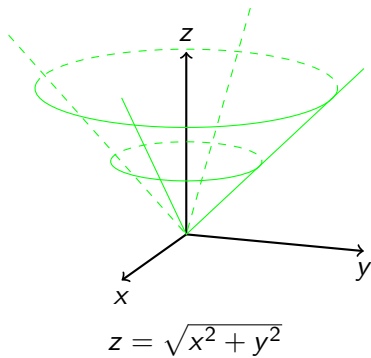




$$x + y + 2z = 6$$



$$x + y + 2z = 12$$



$$z = xy$$

Definíció

Legyen $\mathbf{a}$ torlódási pontja $\text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^n$ -nek, és $b \in \mathbb{R}$! Azt mondjuk, hogy f **határértéke $\mathbf{a}$ -ban b** , ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \mathbf{x} \in \text{Dom}_f \implies |f(\mathbf{x}) - b| < \varepsilon.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b.$$

Legyen $\mathbf{a} \in \text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^n$! Azt mondjuk, hogy f **folytonos $\mathbf{a}$ -ban**, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \mathbf{x} \in \text{Dom}_f, |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan, most is szoros kapcsolat van a határ- érték és a folytonosság között, ami a definíció közvetlen következménye.

Következmény

Legyen $\mathbf{a} \in \text{Dom}_f$ *torlódási pontja* Dom_f -nek! f *pontosan akkor folytonos $\mathbf{a}$ -ban*, ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Megjegyzés

Legyen $\mathbf{a}$ belső pontja Dom_f -nek úgy, hogy f folytonos $\mathbf{a}$ -ban, és $f(\mathbf{a}) > 0$. Ekkor

$$\exists B(\mathbf{a}) : \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}) \implies f(\mathbf{x}) > 0.$$

Tétel (Átviteli elv)

Legyen $\mathbf{a}$ torlódási pontja Dom_f -nek! f határértéke $\mathbf{a}$ -ban b pontosan akkor, ha minden $\text{Dom}_f \setminus \{\mathbf{a}\}$ -beli $\mathbf{a}$ -hoz tartó $\mathbf{x}_k$ sorozatra az $f(\mathbf{x}_k)$ sorozat tart b -hez, azaz

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b \iff \begin{cases} \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a} \implies f(\mathbf{x}_k) \rightarrow b, \\ \text{ahol } \mathbf{x}_k \text{ tetszőleges } \text{Dom}_f \setminus \{\mathbf{a}\}\text{-beli sorozat.} \end{cases}$$

Legyen most $\mathbf{a} \in \text{Dom}_f$! f folytonos $\mathbf{a}$ -ban pontosan akkor, ha minden Dom_f -beli $\mathbf{a}$ -hoz tartó $\mathbf{x}_k$ sorozatra az $f(\mathbf{x}_k)$ sorozat tart $f(\mathbf{a})$ -hoz.

Definíció

Azt mondjuk, hogy f **folytonos**, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos. Illetve, ha $A \subset \text{Dom}_f$ és $f|_A$ folytonos, akkor azt is mondjuk, hogy f **folytonos A -n**.

Az átviteli elv segítségével bizonyítható az alábbi tétel:

Tétel (Folytonosság és műveletek)

Ha f és g n -változós függvények folytonosak az $\mathbf{a} \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g$ pontban, illetve $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor λf , $f \pm g$ és $f \cdot g$ is folytonos $\mathbf{a}$ -ban. Ha még $g(\mathbf{a}) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is folytonos $\mathbf{a}$ -ban.

Feladat

Mutassuk meg, hogy $f(x, y) = y$ folytonos $\mathbb{R}^2$ -en!

Hasonlóan látható, hogy az $f(x, y) = x$ is folytonos $\mathbb{R}^2$ -en, illetve hogy $f(\mathbf{x}) = x_i$ folytonos $\mathbb{R}^n$ -en, $i = 1, 2, \dots, n$.

Megjegyzés

A fenti tételből következik, hogy x^m, y^k valamint $x^m \cdot y^k$ is folytonosak és így ezek konstansszorosai, összegei is folytonosak. Tehát az n változós polinomok, így például a lineáris funkcionálok folytonosak. Sőt, az $r(\mathbf{x}) = \frac{p_m(\mathbf{x})}{p_k(\mathbf{x})}$ (két polinom hányadosa) racionális tört kifejezés is folytonos, ha a nevező nem nulla.

Feladat

Hol folytonos a

$$p_4(x, y, z) = x^3z + 5xyz - 4z^2 + 6y - \sqrt{2}$$

háromváltozós, negyedfokú polinom?

Következmény

A skaláris szorzás folytonos.

Legyen most f egyváltozós, míg g többváltozós! Ekkor $f \circ g : \text{Dom}_{f \circ g} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt

$$\mathbf{x} \in \text{Dom}_{f \circ g} = \{\mathbf{x} \in \text{Dom}_g : g(\mathbf{x}) \in \text{Dom}_f\}$$

esetén értelmezzük, így:

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})).$$

Tétel (Összetett függvény folytonossága)

Ha g folytonos $\mathbf{a}$ -ban, ahol $\mathbf{a} \in \text{Dom}_g$, és f folytonos b -ben, ahol $b = g(\mathbf{a}) \in \text{Dom}_f$, akkor $f \circ g$ folytonos $\mathbf{a}$ -ban.

Például, ha folytonos egyváltozós függvénybe folytonos kétváltozós függvényt helyettesítünk, akkor folytonos függvényt kapunk.

Példa

Hol folytonos a $\sin(x + 2y^2)$ függvény?

Látjuk, hogy a szokásos függvényekből zárt alakban alkotott függvények (elemi függvények) többváltozós esetben is folytonosak, így határértékük vizsgálata sem nehéz. Más a helyzet a következő függvényekkel.

Az egyszerűség kedvéért, bevezetjük a következő jelölést.

Definíció

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, akkor D -nek $\mathbf{a}$ -val való eltolása alatt a

$$\{\mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in D\}$$

halmazt értjük. Erre bevezetjük a

$$D + \mathbf{a}$$

jelölést.

Hasonlóan értelmezzük a

$$D - \mathbf{a} = \{\mathbf{x} - \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in D\}$$

halmazt is.

Megjegyzés

$$D - \mathbf{a} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} + \mathbf{a} \in D\}$$

Lemma

$\mathbf{a}$ pontosan akkor torlódási pontja Dom_f -nek, ha $\mathbf{0}$ torlódási pontja $\text{Dom}_f - \mathbf{a}$ -nak. Továbbá, ha $\text{Dom}_g = \text{Dom}_f - \mathbf{a}$, és $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{a})$, akkor

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} g(\mathbf{x}).$$

Ez alatt azt értve, hogy ha az egyik létezik, akkor a másik is, és ilyenkor egyenlőek.

A lemma miatt elég csak origóbeli határértéket vizsgálnunk a következő tételben (és általában is). Továbbá, a következő tételt csak kétváltozós függvényre mondjuk ki, de hasonlóan mondhatnánk még több változó esetén is.

Tétel (Határérték szükséges feltételei)

Legyen $\text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^2$ úgy, hogy az origó belső pontja $\text{Dom}_f \cup \{\mathbf{0}\}$ -nak, azaz $\exists \dot{B}(\mathbf{0}) \subset \text{Dom}_f$! Ha az f függvénynek létezik határértéke az origóban, és ez $A \in \mathbb{R}$, azaz

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = A \in \mathbb{R},$$

akkor a következők is teljesülnek:

1. $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = A;$
2. $\exists \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = A;$
3. $\exists \lim_{\substack{y=x \\ x \rightarrow 0}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = A;$
4. $\forall m \in \mathbb{R} : \exists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,mx) = A;$
5. ha $\forall x \in B(0) : \exists \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$, akkor $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = A;$
6. ha $\forall y \in B(0) : \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$, akkor $\exists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = A;$

Feladat

Hol folytonos az $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ függvény?

Feladat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = ?$$
$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{3x^4 + 4y^4}$$

Feladat

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow \mathbf{0}} \frac{x + y + 2z}{x - z + xy} = ?$$

A következő feladat mutatja, hogy a tételben (163) szereplő feltételek együttes teljesülése sem elégséges.

Feladat

Van-e határértéke az origóban az

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ és a } g(x, y) = \frac{xy}{x - y}$$

függvényeknek?

$$z = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Tétel (Határérték polárkoordinátákkal)

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = A$ pontosan akkor, ha $\lim_{r \rightarrow 0+} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = A$ teljesül, akkor is ha φ nem állandó.

Megjegyzés

A φ nem állandó azt jelenti, hogy minden $\varphi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén

$$\lim_{r \rightarrow 0+} f(r \cos \varphi(r), r \sin \varphi(r)) = A.$$

Átviteli elvvel megfogalmazva $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = A$ pontosan akkor, ha minden r_n pozitív tagú nullsorozat és φ_n sorozat estén $f(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n) \rightarrow A$.

Következmény

Ha $f(x,y) = g(r)h(\varphi)$ úgy, hogy $\lim_{r \rightarrow 0+} g(r) = 0$ és h korlátos, akkor $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

Feladat

Folytonos-e $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ az origóban?

Feladat

Hol folytonos az $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{ha } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$ függvény?

A szakasz eddigi definícióit és tételeit lényegében változatlan formában megismételhetjük többértékű, azaz vektor értékű függvényekre is. Mi csak a leglényegesebbeket ismételjük, és kimondunk egy tételt, ami mutatja, hogy a bizonyításokat sem kell ismételnünk.

Definíció

Legyen $\mathbf{a}$ torlódási pontja $\text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^n$ -nek, és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$! Azt mondjuk, hogy f **határértéke $\mathbf{a}$ -ban $\mathbf{b}$** , ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \mathbf{x} \in \text{Dom}_f \implies |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Legyen $\mathbf{a} \in \text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^n$! Azt mondjuk, hogy f **folytonos $\mathbf{a}$ -ban**, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \mathbf{x} \in \text{Dom}_f, |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

Tétel (Koordinátánkénti konvergencia és folytonosság)

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$, és $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}$ koordináta-függvényeire használjuk az $f_1, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$ jelölést.

Ha $\mathbf{a}$ torlódási pontja $D = \text{Dom}_{\mathbf{f}}$ -nek illetve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, akkor

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \iff \forall i \in \{1, \dots, m\} : \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i.$$

Ha $\mathbf{a} \in D = \text{Dom}_{\mathbf{f}}$, akkor

$$\mathbf{f} \text{ folytonos } \mathbf{a}\text{-ban} \iff \forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i \text{ folytonos } \mathbf{a}\text{-ban}.$$

Az előző tételek mutatják, hogy a valós értékű függvényeknél kimondott tételek vektor értékű függvényekre is kimondhatók.

Például a folytonosság (vagy határérték) és a műveletek kapcsolata igaz marad a skalárral való szorzás, az összeadás és a kivonás esetében. Szorzásra és osztásra azonban nem mondhatjuk, mert ekkor vektorokat kellene szorozni illetve osztani. Az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt megismételjük bizonyítás nélkül.

Tétel (Összetett függvény folytonossága)

Legyen $\mathbf{g} : \text{Dom}_g \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, illetve $\mathbf{f} : \text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$! Ha $\mathbf{g}$ folytonos $\mathbf{a}$ -ban, ahol $\mathbf{a} \in \text{Dom}_g$, és $\mathbf{f}$ folytonos $\mathbf{b}$ -ben, ahol $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a}) \in \text{Dom}_f$, akkor $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ folytonos $\mathbf{a}$ -ban.

Egy korábbi következmény (158) alapján kapjuk, hogy folytonos vektor értékű függvények skaláris szorzata folytonos, azaz ha $\mathbf{f}$ és $\mathbf{g}$ folytonos $\mathbf{a}$ -ban, akkor

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle$$

is folytonos $\mathbf{a}$ -ban.

Definíció

Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, és $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos úgy, hogy $\varphi(\alpha) = \mathbf{a}$ és $\varphi(\beta) = \mathbf{b}$, akkor azt mondjuk, hogy

$$g_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \{(\varphi(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

egy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontokat összekötő **folytonos út**.

Továbbá, az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt **összefüggő**nek nevezzük, ha bármely két pontja összeköthető halmazbeli folytonos úttal, azaz

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A : \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \exists \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow A \text{ folytonos} : \varphi(\alpha) = \mathbf{a}, \varphi(\beta) = \mathbf{b}.$$

Tétel (Bolzano-tétel)

Ha $D \subset \text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő, f folytonos a D halmazon, akkor $f(D) \subset \mathbb{R}^m$ is összefüggő.

Definíció

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén azt mondjuk, hogy az

$$I_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mid t \in [0, 1]\}$$

az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontokat összekötő **szakasz**.

Továbbá, az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt **konvex**nek nevezzük, ha bármely két pontját összekötő szakasz a halmazban fut, azaz

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A : I_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \subset A.$$

Tétel

A szakasz folytonos út, ezért konvex halmaz összefüggő.

Megjegyzés

Ha $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon > 0$, akkor $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ konvex.

Tétel (Weierstrass-tétel)

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ folytonos, akkor $f(D)$ is kompakt.

Következmény

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor felveszi minimumát és maximumát, azaz

$$\exists \mathbf{a}, \mathbf{b} \in D : \forall \mathbf{x} \in \text{Dom} : f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b}).$$

Feladat

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Folytonos-e f , illetve korlátos-e a $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ körlapon?

Feladat

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Folytonos-e g , illetve korlátos-e a $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ körlapon?

Tétel

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ folytonos és invertálható, akkor inverze is folytonos.

Összefüggő halmazon folytonos invertálható függvény inverze nem biztos, hogy folytonos.

Feladat

Mutassuk meg, hogy $f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ invertálható folytonos függvény inverze nem folytonos!

Definíció

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos a $D \subset \text{Dom}_f$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, hogy

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Megjegyzés

Az $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ függvény nem egyenletesen folytonos, mert például $x < \min\{2\delta, 100\}$, $y = \frac{x}{2}$ esetén $|x - y| = x - y < \delta$, de $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{x} > 0.01$.

Tétel (Heine-tétele)

Kompakt halmazon folytonos függvény ott egyenletesen folytonos.

Definíció

Legyen $\mathbf{a} \in \text{Dom}_f$! Konstruáljuk meg a g egyváltozós függvényt úgy, hogy

$$g(\xi) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, \xi, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

teljesüljön. Ha g deriválható $\xi = a_i$ -ben, akkor azt mondjuk, hogy f parciálisan deriválható az i -edik változója szerint $\mathbf{a}$ -ban, és $g'(a_i)$ -t az f $\mathbf{a}$ -beli, i -edik változó szerinti **parciális derivált**jának nevezzük.

Ezt többféleképpen is jelölhetjük, nevezetesen

$$f'_{x_i}(\mathbf{a}); \quad \left. \frac{df}{dx_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}; \quad \frac{df}{dx_i}(\mathbf{a}); \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}); \quad D_i f(\mathbf{a}).$$

Megjegyzés

Ahhoz, hogy a fenti g deriválható legyen a_i -ben kell, hogy a_i belső pontja legyen Dom_g -nek. Emiatt csak olyan $\mathbf{a}$ -ban értelmezzük az i -edik változó szerinti parciális deriváltat, amire $\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i \in \text{Dom}_f$, ha $|h|$ elég kicsi. Ha például $\mathbf{a}$ belső pontja Dom_f -nek, akkor ez a feltétel biztosan teljesül egy korábbi tétel (134) miatt.

Megjegyzés

A parciális deriváltakat közvetve egyváltozós határértékként értelmeztük, így

$$\begin{aligned}f'_{x_i}(\mathbf{a}) &= \lim_{\xi \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, \xi, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\xi - a_i} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}.\end{aligned}$$

Speciálisan, kétváltozós esetben

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

és

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

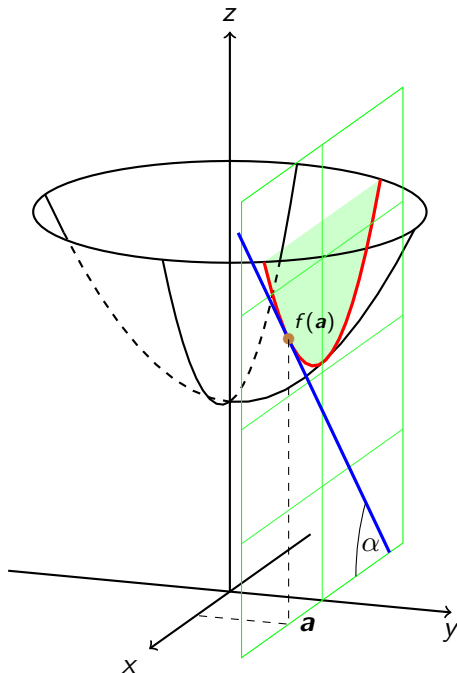
Megjegyzés

Tekintsük a függvény grafikonja, és az $y = y_0$ sík metszetét, azaz az $y = y_0$ feltételnek eleget tevő **felületi görbét**. Ez a

$$\{(x, y_0, \underbrace{f(x, y_0)}_{g(x)})\}$$

ponthalmaz. Legyen α ezen görbe $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontbeli érintőegyenésének hajlásszöge (az $y = y_0$ síkban). Az egyváltozós függvény deriváltjának geometriai tartalma miatt: $\operatorname{tg} \alpha = g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Irányvektora

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, f'_x(x_0, y_0)).$$



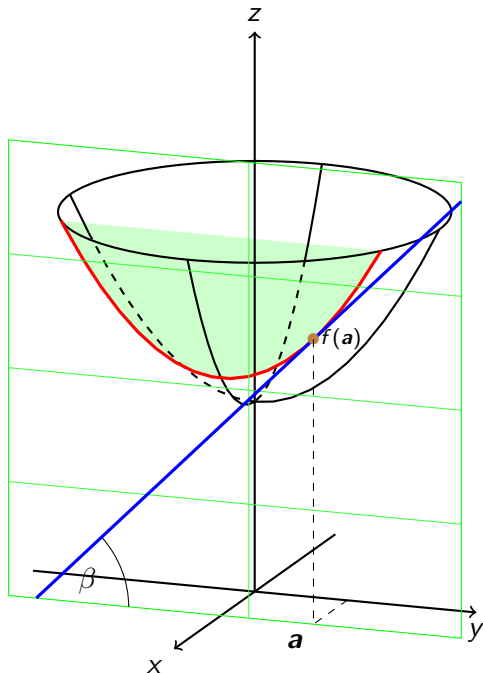
Megjegyzés

Tekintsük a függvény grafikonja, és az $x = x_0$ **sík** metszetét, azaz az $x = x_0$ feltételnek eleget tevő **felületi görbét**. Ez a

$$\{(x_0, y, \underbrace{f(x_0, y)}_{g(y)})\}$$

ponthalmaz. Legyen β ezen görbe $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontbeli **érintőegyenes**ének hajlásszöge (az $x = x_0$ **síkban**). Az egyváltozós függvény deriváltjának geometriai tartalma miatt: $\operatorname{tg} \beta = g'(y_0) = f'_y(x_0, y_0)$. Irányvektora

$$\mathbf{v}_2 = (0, 1, f'_y(x_0, y_0)).$$



Megjegyzés (Geometriai tartalom)

Számoljuk most ki a két érintőegyenes által meghatározott sík egyenletét! Ez a sík áthalad a $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ponton és $\mathbf{n}$ normálvektora merőleges $\mathbf{v}_1$ -re és $\mathbf{v}_2$ -re is, tehát

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -f'_x(x_0, y_0)\mathbf{e}_1 - f'_y(x_0, y_0)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Ennek (-1) -szeresével szoktunk dolgozni, így ennek a síknak egy egyenlete:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Később lesz róla szó, hogy milyen feltételek mellett fogjuk ezt a síkot az f függvény (x_0, y_0) -hoz tartozó érintősíkjának nevezni.

Feladat

Adjuk meg az

$$f(x, y) = y^3 e^{-3x} + 2x^4 + 3(2y + 1)^5$$

függvény parciális deriváltjait!

Feladat

Adjuk meg az

$$f(x, y) = 2x^3 \cos \frac{x}{y} + x^2 + y^3$$

függvény parciális deriváltjait!

Feladat

Adjuk meg az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+2)^2 y}{x^2 + y^2} + 2x + 3, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 3, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény origóbeli parciális deriváltjait!

Egyváltozós esetben akkor neveztük az f függvényt deriválhatónak az $a \in \text{int } \text{Dom}_f$ -ben, ha az

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

határérték létezik és véges. Ez így több változós esetben nem megy, mert a nevezőben vektor lenne. Ezért használjuk az ekvivalens Fréchet-féle alakot

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x - a)|}{|x - a|} = 0,$$

vagy a lineáris approximációt,

$$\Delta f = f(a + h) - f(a) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h,$$

ahol A független h -tól, és $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Ezek átírhatók vektorokra.

Definíció (Pontbeli derivált)

Legyen $\mathbf{a}$ belső pontja Dom_f -nek! Azt mondjuk, hogy f (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban, és $\mathbf{a}$ -beli deriváltja az $A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ sormátrix, ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - A(\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = 0.$$

A deriváltra (deriváltmátrixra) az

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = A$$

jelölést vezetjük be, illetve az A^T vektort az f függvény $\mathbf{a}$ -beli **gradiensvektor**ának nevezzük. Szintén használjuk a következő jelölést

$$\text{grad}f(\mathbf{a}) = A^T.$$

Megjegyzés

Ha $\mathbf{G}$ jelöli a gradiensvektort, akkor a határértéket így is írhatjuk:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \langle \mathbf{G}, \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = 0.$$

Tétel (Lineáris approximáció)

Legyen $\mathbf{a}$ belső pontja Dom_f -nek! f (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban, és $\mathbf{a}$ -beli gradiensvektora $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^n$ pontosan akkor, ha $\exists \varepsilon : \text{Dom}_f \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall \mathbf{x} \in \text{Dom}_f$ esetén

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{G}, \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle + \varepsilon(\mathbf{x}) \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$$

és

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \varepsilon(\mathbf{x}) = 0.$$

Megjegyzés

Az is ekvivalens a deriválhatósággal, hogy $\exists \boldsymbol{\varepsilon} : \text{Dom}_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ úgy, hogy $\forall \mathbf{x} \in \text{Dom}_f$ esetén

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{G}, \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle \quad \text{és} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Tétel (A totális deriválhatóság szükséges feltételei)

Ha f az $\mathbf{a}$ -ban totálisan deriválható, akkor

- 1. mindegyik változója szerint deriválható parciálisan, és*

$$f'(\mathbf{a}) = [D_1 f(\mathbf{a}) \ D_2 f(\mathbf{a}) \ \dots \ D_n f(\mathbf{a})],$$

azaz gradiense

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{G} = (D_1 f(\mathbf{a}), D_2 f(\mathbf{a}), \dots, D_n f(\mathbf{a})).$$

- 2. folytonos $\mathbf{a}$ -ban.*

Tétel (A totális deriválhatóság elégséges feltétele)

Legyen $\mathbf{a}$ belső pontja Dom_f -nek! Ha f mindegyik változója szerint parciálisan deriválható valamely $B_{\mathbf{a}}$ -ban, és a parciális deriváltak folytonosak $\mathbf{a}$ -ban, akkor f totálisan deriválható $\mathbf{a}$ -ban.

Feladat

Hol differenciálható (totálisan) az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény? $\text{grad} f = ?$

Feladat

Legyen $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + 1)e^y}$! $\text{grad} f = ?$

Feladat

Differenciálható-e a $(0, 0)$ pontban az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény?

Feladat

Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \text{sh} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0! \end{cases}$$

1. Írja fel f'_x -et, ahol az létezik!
2. Totálisan deriválható-e f a $(0, 0)$ -ban?

Feladat

Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + 3y, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. $f'_x(0, 0) = ?$ $f'_y(0, 0) = ?$
2. $\text{grad} f(0, 0) = ?$

Feladat

Differenciálható-e az origóban a

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény?

Feladat

Differenciálható-e az origóban az

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{ha } x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{máskor} \end{cases}$$

függvény?

Feladat

Hol differenciálható az

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{2x^3y}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény?

Legyen a kétváltozós $f(x, y)$ függvény (totálisan) deriválható a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban! Tekintsük a $z = f(x, y)$ által meghatározott felület $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi pontját! Az előzőekben láttuk, hogy

$$\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k.$$

Vagy más jelölésekkel:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Tehát

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ennek geometriai tartalma, hogy a $z = f(x, y)$ felületet a

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

síkkal közelítjük, ha $x - x_0$ és $y - y_0$ kicsi. Tehát az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi pont egy elég kicsiny sugarú környezetében f grafikonja közelítőleg ezzel a síkkal helyettesíthető. Ennek a síknak a neve érintősík. Átrendezve a sík egyenletét és összefoglalva az előzőeket:

Definíció

Legyen $\text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^n$ és f deriválható $\mathbf{a}$ -ban! Az f függvény $\mathbf{a}$ ponthoz tartozó **érintőjének** nevezzük az

$$y = f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + f(\mathbf{a})$$

egyenlettel adott hipersíkot.

Megjegyzés

$n = 1$ esetén érintőegyenes.

$n = 2$, $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ ponthoz tartozó érintősík az

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

egyenlettel adott síkot. Az érintősík normálvektora

$$\mathbf{n} = f'_x(x_0, y_0)\mathbf{e}_1 + f'_y(x_0, y_0)\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1).$$

Már tudjuk, hogy az érintősík tartalmazza két felületi görbe érintőegyenesét. (Lásd parciális deriváltak geometriai tartalmát!) Az is belátható, hogy minden, a $P_0^* = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi ponton áthaladó, érintővel rendelkező felületi görbe érintőegyenesese benne van ebben a síkban.

Feladat

Legyen $f(x, y) = y^{2x}$ és $P_0 = (-1, 1)$!

1. Írja fel az f függvény P_0 pontbeli gradiensét, ha az létezik!
2. Írja fel a P_0 ponthoz tartozó érintősík egyenletét!

Az iránymenti derivált az értelmezési tartomány $\mathbf{a}$ pontjában az $\mathbf{e}$ irányban adja meg a függvény változási sebességét. Feltételezzük, hogy $|\mathbf{e}| = 1$.

Definíció

Legyen $\mathbf{a}$ belső pontja Dom_f -nek és $|\mathbf{e}| = 1$! Ha létezik

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{a})}{t} \in \mathbb{R},$$

akkor azt mondjuk, hogy f **deriválható** $\mathbf{a}$ -ban az $\mathbf{e}$ **irány mentén**.

Ekkor a fenti határértéket az f $\mathbf{a}$ -beli $\mathbf{e}$ **iránymenti deriváltjának** nevezzük, és a

$$\left. \frac{df}{d\mathbf{e}} \right|_{\mathbf{a}}, \quad \text{illetve} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} \right|_{\mathbf{a}}$$

jelöléseket használjuk.

Megjegyzés

Mi t jobboldali határértékeként definiáltuk, de szokás kétoldali határértékként is definiálni. Ekkor a parciális deriváltak speciális iránymenti deriváltak lennének.

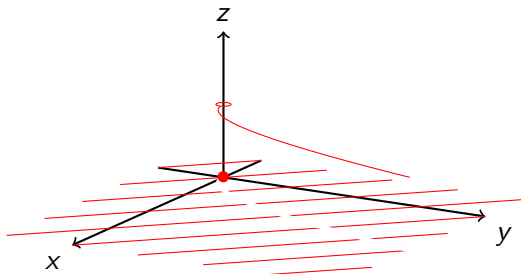
Tétel (Elégséges feltétel iránymenti derivált létezésére)

Ha f totálisan deriválható $\mathbf{a}$ -ban, akkor tetszőleges $\mathbf{e}$ egységvektor mentén létezik az iránymenti derivált, és

$$\left. \frac{df}{d\mathbf{e}} \right|_{\mathbf{a}} = f'(\mathbf{a})\mathbf{e}.$$

Megjegyzés

Ha egy pontban minden irányban létezik az iránymenti derivált, akkor sem biztos, hogy a függvény ebben a pontban totálisan deriválható. Például az

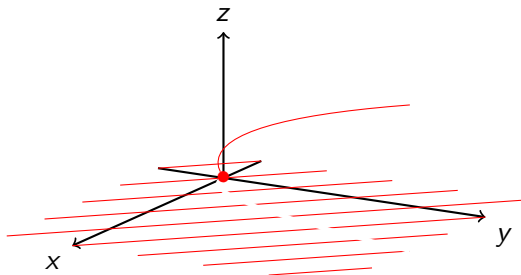


$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x = \sqrt{y}, \\ 0, & \text{máskor} \end{cases}$$

függvény az origóban minden irány mentén deriválható, sőt minden iránymenti deriváltja 0, de nem folytonos, így nem is deriválható totálisan.

Megjegyzés

Jegyezzük meg, hogy az



$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x = \sqrt{y}, \\ 0, & \text{máskor} \end{cases}$$

függvény még folytonos is, mégis hiába 0 minden iránymenti deriváltja, nem deriválható totálisan.

Tétel

Ha f (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban, akkor a maximális iránymenti derivált iránya $\text{grad}f(\mathbf{a})$, értéke: $|\text{grad}f(\mathbf{a})|$.

Megjegyzés

Ha f (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban, akkor a minimális iránymenti derivált iránya $-\text{grad}f(\mathbf{a})$, értéke: $-|\text{grad}f(\mathbf{a})|$.

Tétel

Legyen f (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban. Ekkor

1. $\text{grad}f(\mathbf{a})$ ortogonális az $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ szintalakzatra;
2. ha $\text{grad}f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, akkor a növekvő paraméterű szintalakzatok irányába mutat.

Megjegyzés

A feladatokban $\mathbf{e} \parallel \mathbf{v}$ nem csak azt jelenti, hogy a két vektor párhuzamos, azaz állásuk megegyezik, hanem az irányuk egyezőségét is. Azaz, ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{e} \parallel \mathbf{v}$ jelentése, hogy $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{e} = \lambda \mathbf{v}$, és $\lambda \geq 0$.

Feladat

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + 1, \quad P_0 = (1, -1, 0)$$

1. $\text{grad} f(P_0) = ?$
2. $\left. \frac{df}{d\mathbf{e}} \right|_{P_0} = ?$ ha $\mathbf{e} \parallel \mathbf{v} = (2, 1, 3)$
3. Adja meg $\max \left. \frac{df}{d\mathbf{e}} \right|_{P_0}$ értékét és irányát!
4. Írja fel a P_0 ponton áthaladó szintfelület egyenletét és annak P_0 -beli érintősíkját!

Feladat

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{3x^2 + 4y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{1}{7}, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Mutassuk meg, hogy $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ nem létezik!
2. Hol differenciálható totálisan az f kétváltozós függvény? $\text{grad} f = ?$
3. Írjuk fel a $P = (0, 1)$ ponthoz tartozó érintősíket egyenletét!
4. $\left. \frac{df}{d\mathbf{e}} \right|_{(0,1)} = ?$ ill. $\left. \frac{df}{d\mathbf{e}} \right|_{(0,0)} = ?$, ha $\mathbf{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Feladat

Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Határozza meg az f függvény parciális deriváltjait az origóban!
2. Mutassa meg, hogy f -nek létezik az origóban a $\mathbf{v} = (1, 1)$ irányú iránymenti deriváltja, és értéke nem nulla!
3. Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?
4. Milyen előjelű az f függvény az origó környezetében? Van-e az f -nek lokális szélsőértéke az origóban?

Definíció

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{a}$ belső pontja D -nek!

Azt mondjuk, hogy $\mathbf{f}$ (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban, és $\mathbf{a}$ -beli deriváltja az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - A(\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = 0$$

teljesül.

A deriváltra (deriváltmátrixra) az

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = A$$

jelölést vezetjük be.

Tétel (Lineáris approximáció)

Legyen $\mathbf{a}$ belső pontja $D \subset \mathbb{R}^n$ -nek! $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban, és $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pontosan akkor, ha $\exists \boldsymbol{\varepsilon} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ úgy, hogy $\forall \mathbf{x} \in D$ esetén

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \quad \text{és} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Megjegyzés

Az is ekvivalens a deriválhatósággal, hogy $\exists E : D \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ úgy, hogy $\forall \mathbf{x} \in D$ esetén

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad \text{és} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} E(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Tétel

Ha bevezetjük az $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ jelölést, ahol $f_i : D \rightarrow \mathbb{R} \ \forall i$ -re, és $\mathbf{a} \in \text{int } D$, akkor

$\mathbf{f}$ deriválható $\mathbf{a}$ -ban $\iff f_i$ deriválható $\mathbf{a}$ -ban $(i = 1, \dots, m)$.

Továbbá, ekkor $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ i -edik sora $f'_i(\mathbf{a})$, aminek transzponáltja $\text{grad} f_i(\mathbf{a})$, azaz

$$A = \begin{bmatrix} f'_1(\mathbf{a}) \\ f'_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f'_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{grad}^T f_1 \\ \text{grad}^T f_2 \\ \vdots \\ \text{grad}^T f_m \end{bmatrix}_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{a}}$$

Definíció

Ha $n = m$, akkor az $\mathbf{f}$ függvény az n dimenziós euklideszi teret önmagába képezi le. Ilyenkor a deriváltmátrixot **Jacobi-mátrix**nak nevezzük, determinánsát pedig **Jacobi-determináns**nak.

Értelmezhetnénk többértékű függvény parciális deriváltjait, aminek egy pontbeli értéke egy vektor lenne, nevezetesen a k -adik változó szerinti parciális derivált a deriváltmátrix k -adik oszlopa lenne.

Sőt iránymenti deriváltat is értelmezhetnénk, és itt is igaz, hogy ha $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban, akkor ott minden $\mathbf{e}$ irány menti deriváltja is létezik, és

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{e}} \right|_{\mathbf{a}} = \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}.$$

Például, ha $n = m = 3$, akkor $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transzformáció esetén a Jacobi-mátrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}_{\mathbf{a}} = \left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)} \right|_{\mathbf{a}}.$$

Tétel (Derivált és műveletek)

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \text{int } D$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ illetve $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}$ deriválható $\mathbf{a}$ -ban!
Ekkor $\mathbf{f} \pm \mathbf{g}$, $\lambda \mathbf{f}$ és ha $\lambda(\mathbf{a}) \neq 0$, akkor $\mathbf{f}/\lambda$ is deriválható $\mathbf{a}$ -ban, és

1. $(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \pm \mathbf{g}'(\mathbf{a})$,
2. $(\lambda \cdot \mathbf{f})'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})\lambda'(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a})\mathbf{f}'(\mathbf{a})$,
3. $\left(\frac{\mathbf{f}}{\lambda}\right)'(\mathbf{a}) = \frac{\lambda(\mathbf{a})\mathbf{f}'(\mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\lambda'(\mathbf{a})}{(\lambda(\mathbf{a}))^2}$

Tétel (Összetett függvény deriválhatósága (láncszabály))

Legyen $\mathbf{g} : \text{Dom}_{\mathbf{g}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, illetve $\mathbf{f} : \text{Dom}_{\mathbf{f}} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, és $\mathbf{a}$ belső pontja $\text{Dom}_{\mathbf{g}}$ -nek, illetve $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ belső pontja $\text{Dom}_{\mathbf{f}}$ -nek. Ha $\mathbf{g}$ totálisan deriválható $\mathbf{a}$ -ban, illetve $\mathbf{f}$ totálisan deriválható $\mathbf{b}$ -ben, akkor $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \text{Dom}_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ totálisan deriválható $\mathbf{a}$ -ban, és deriváltja itt

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{g}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\mathbf{g}'(\mathbf{a}).$$

Feladat

Adjuk meg az $f(x, y) = e^{x^2 y} \ln(x^2 + y^2 + 1)$ deriváltját! Térjünk át polárkoordinátákra!
Egy tetszőleges $f(x, y)$ deriválható függvény deriváltját adjuk meg polárkoordinátákkal!

Megoldás.

$$f'(a) =$$

$$\left[2xye^{x^2 y} \ln(x^2 + y^2 + 1) + e^{x^2 y} \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \quad x^2 e^{x^2 y} \ln(x^2 + y^2 + 1) + e^{x^2 y} \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right]$$

$$g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \text{ deriváltja } g'(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}, \text{ így } (f \circ g)'(r, \varphi) =$$

$$f'(g(r, \varphi))g'(r, \varphi) = \begin{bmatrix} f'_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) & f'_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2r \cos \varphi r \sin \varphi e^{(r \cos \varphi)^2 r \sin \varphi} \ln(r^2 + 1) + e^{(r \cos \varphi)^2 r \sin \varphi} \frac{2r \cos \varphi}{r^2 + 1} \\ (r \cos \varphi)^2 e^{(r \cos \varphi)^2 r \sin \varphi} \ln(r^2 + 1) + e^{(r \cos \varphi)^2 r \sin \varphi} \frac{2r \sin \varphi}{r^2 + 1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} =$$

$$= r e^{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi} \left[3r \sin \varphi \cos^2 \varphi \ln(r^2 + 1) + \frac{2}{r^2 + 1} \ln(r^2 + 1) \cos \varphi (1 - 3r^2 \sin^2 \varphi) \right]$$



Példa

Ha a külső függvény $\mathbb{R}^k$ -ból $\mathbb{R}$ -be képez ($m = 1$), akkor deriváltmátrixa, azaz a gradiensvektor transzponáltja

$$f' = (\text{grad} f)^T,$$

és az összetett függvény deriváltmátrixa:

$$(f \circ \mathbf{g})' = (\text{grad} f)^T \cdot \mathbf{g}'.$$

Alkalmazzuk az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ jelölést $\mathbf{g}$ változójára, és

$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_k(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ jelölést f változójára. Ekkor

$$(f \circ \mathbf{g})'(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_k} \end{bmatrix}_{\mathbf{g}(\mathbf{a})} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{a}}.$$

Példa

Ekkor az összetett függvény deriváltjának (ez egy sormátrix) i -edik eleme az összetett függvény parciális deriváltja az i -edik változója szerint. Ez mátrixok szorzásaként

$$\left. \frac{\partial(f \circ \mathbf{g})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{a}} = f'(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \mathbf{g}'_{x_i}(\mathbf{a}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

vektorok skaláris szorzataként

$$\left. \frac{\partial(f \circ \mathbf{g})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{a}} = \text{grad} f(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{g}'_{x_i}(\mathbf{a}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

illetve részletezve

$$\left. \frac{\partial(f \circ \mathbf{g})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{a}} = \left. \frac{\partial f}{\partial y_1} \right|_{\mathbf{g}(\mathbf{a})} \cdot \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{a}} + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial y_k} \right|_{\mathbf{g}(\mathbf{a})} \cdot \left. \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{a}} = \sum_{j=1}^k \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y_j} \right|_{\mathbf{g}(\mathbf{a})} \cdot \left. \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{a}} \right).$$

Az összetett függvény parciális deriváltjait felírva rendre $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, megkaphatjuk a $f \circ \mathbf{g}$ gradiensét is:

$$\text{grad}(f \circ \mathbf{g}) = (\text{grad} f \cdot D_1 \mathbf{g}, \text{grad} f \cdot D_2 \mathbf{g}, \dots, \text{grad} f \cdot D_n \mathbf{g}).$$

Példa

Írjuk fel az előző láncszabályt $n = 1$ és tetszőleges m esetére. Alkalmazzuk az x jelölést $\mathbf{g}$ változójára, és $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k) = (g_1(x), \dots, g_k(x)) = \mathbf{g}(x)$ jelölést f változójára.

Ekkor

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(a) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(a))\mathbf{g}'(a)$$

egy oszlopmátrix, nevezetesen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_k} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_k} \end{bmatrix}_{\mathbf{g}(a)} \cdot \begin{bmatrix} g'_1(a) \\ g'_2(a) \\ \vdots \\ g'_k(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_j} \Big|_{\mathbf{g}(a)} \cdot g'_j(a) \right) \\ \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_j} \Big|_{\mathbf{g}(a)} \cdot g'_j(a) \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f_m}{\partial y_j} \Big|_{\mathbf{g}(a)} \cdot g'_j(a) \right) \end{bmatrix}.$$

Példa

Az előző példák alapján, ha $n = m = 1$, tehát az $f(y_1, \dots, y_k)$ külső függvénybe az $y_j = g_j(a)$ ($j = 1, \dots, k$) belső függvényeket helyettesítjük, akkor $f \circ \mathbf{g}$ deriváltja

$$(f \circ \mathbf{g})'(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_k} \right]_{\mathbf{g}(a)} \cdot \begin{bmatrix} g'_1(a) \\ g'_2(a) \\ \vdots \\ g'_k(a) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \Big|_{\mathbf{g}(a)} \cdot g'_j(a) \right).$$

Példa

Legyen most $k = 1$ és n és m legyen tetszőleges! Alkalmazzuk az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ jelölést a g változójára, és $y = g(\mathbf{x})$ jelölést az $\mathbf{f}$ változójára. Ekkor

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} \circ g)'(\mathbf{a}) &= \begin{bmatrix} f'_1(g(\mathbf{a})) \\ f'_2(g(\mathbf{a})) \\ \vdots \\ f'_m(g(\mathbf{a})) \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial g}{\partial x_n} \right]_{\mathbf{a}} = \\ &= \begin{bmatrix} f'_1(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{a}} & f'_1(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{a}} & \cdots & f'_1(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{a}} \\ f'_2(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{a}} & f'_2(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{a}} & \cdots & f'_2(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{a}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_m(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{a}} & f'_m(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{a}} & \cdots & f'_m(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{a}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ha az $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in [t_1, t_2]$ térgörbe ("út") illeszkedik a $z = f(x, y)$ felületre, akkor

$$z(t) = f(x(t), y(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Ha f, x és y differenciálható, akkor a láncszabály szerint z is, és

$$z'(t) = f'_x x'(t) + f'_y y'(t),$$

azaz

$$f'_x x'(t) + f'_y y'(t) - z'(t) = 0.$$

Tehát a felületi görbe $(x'(t), y'(t), z'(t))$ érintővektora és az érintősík $(f'_x, f'_y, -1)$ normálvektora merőlegesek egymásra (skalárszorzatuk nulla).

Összefoglalva azt kaptuk, hogy ha f totálisan differenciálható, akkor egy differenciálható felületi görbe érintőegyenese valóban a $z = f(x, y)$ felület megfelelő érintősíkjaiban halad.

(Implicit megadási görbe) Azon (x, y) pontok összességét, amelyek kielégítik az $F(x, y) = c$ egyenletet, az F függvény c -hez tartozó szintvonalának nevezzük. Tehát, ha $y = f(x) = y(x)$ az F függvény c -hez tartozó szintvonala, akkor $F(x, y(x)) = c$.

Ha F, f totálisan deriválható, akkor mindkét oldalt x szerint deriválva és a láncszabályt alkalmazva kapjuk:

$$F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0.$$

Ha $F'_y \neq 0$, akkor

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Feladat

1. Határozzuk meg az $F(x, y) = xye^y$ függvény $P = (1, -2)$ ponton átmenő szintvonalának az egyenletét!
2. Írjuk fel ennek a szintvonalnak az $x_0 = 1$ pontbeli deriváltját!

(Implicit megadású felület)

Azon (x, y, z) pontok összességét, amelyek kielégítik az $F(x, y, z) = c$ egyenletet, az F függvény c -hez tartozó szintfelületének nevezzük.

Tehát, ha $z = f(x, y)$ az F függvény c -hez tartozó szintfelülete, akkor

$$F(x, y, f(x, y)) = c, \quad \forall (x, y) \in \text{Dom}_f.$$

Ha a $z = f(x, y)$ és F differenciálható és még feltesszük, hogy $F'_z \neq 0$, akkor $F(x, y, f(x, y)) = c$ mindkét oldalát deriválva a láncszabály értelmében rendre x , illetve y szerint kapjuk, hogy:

$$D_1 F + D_3 F \cdot D_1 f = 0 \implies D_1 f = -\frac{D_1 F}{D_3 F}, \text{ és } D_2 F + D_3 F \cdot D_2 f = 0 \implies D_2 f = -\frac{D_2 F}{D_3 F}.$$

Tudjuk, hogy a $z = f(x, y)$ felület P -beli érintősíkjának egy normálvektora az

$$(f'_x, f'_y, -1)|_P = \left(-\frac{D_1 F}{D_3 F}, -\frac{D_2 F}{D_3 F}, -1\right)|_P, \text{ így egy másik normálvektor a } (D_1 F, D_2 F, D_3 F)|_P.$$

Tehát $\text{grad} F(P)$ merőleges a P -n áthaladó szintfelületre. Így a P -n áthaladó szintfelület P -beli érintősíkjának normálvektora $\text{grad} F(P)$, azaz az $F(x, y, f(x, y)) = c$ szintfelület $P = (x_0, y_0, z_0)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_P (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_P (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_P (z - z_0) = 0.$$

Feladat

$$F(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2, \quad P = (1, 1, -1)$$

1. Írjuk fel F -nek a P ponton áthaladó szintfelületének az implicit egyenletét!
2. Írjuk fel a P ponton áthaladó szintfelület P -beli érintősíkjának az egyenletét!

Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)

Legyen Dom_f konvex, és f (totálisan) deriválható, és legyen $\mathbf{a}$ belső pontja Dom_f -nek. Ekkor $\forall$ olyan $\mathbf{h}$ -hoz, melyre $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in \text{Dom}_f : \exists 0 < \xi < 1$ úgy, hogy

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a} + \xi \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}$$

Megjegyzés

$\mathbf{a} + \xi \mathbf{h}$ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{a} + \mathbf{h}$ végpontú szakasz egy pontja, így a konvexitás miatt $\mathbf{a} + \xi \mathbf{h} \in \text{Dom}_f$.

Következmény

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex és nyílt! Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható D -ben és $\text{grad}f(\mathbf{x}) = 0$, akkor f állandó.

Az n -változós függvény bármely parciális deriváltfüggvénye újból n -változós függvény. Ezért beszélhetünk ennek a függvénynek is a parciális deriváltjairól. Így jutunk el a másodrendű parciális deriváltakhoz.

Példa kétváltozós függvény esetére:

$$f(x, y) = e^{2x} \cos 2y + x^2 - y^2.$$

Ekkor

$$f'_x(x, y) = 2e^{2x} \cos 2y + 2x, \quad f'_y(x, y) = -2e^{2x} \sin 2y - 2y,$$

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x} \cos 2y + 2,$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4e^{2x} \cos 2y - 2,$$

f''_{xx} és f''_{yy} a tiszta másodrendű parciális deriváltak.

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4e^{2x} \sin 2y,$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4e^{2x} \sin 2y.$$

f''_{xy} és f''_{yx} a vegyes másodrendű parciális deriváltak.

A másodrendű parciálisak újra kétváltozós függvények! Vegyük észre, hogy a vegyes másodrendű parciális deriváltak megegyeznek, tehát az eredmény nem függ a differenciálás sorrendjétől. Ez nem véletlen. Látni fogjuk, hogy elég "szép" függvény esetén ez mindig így van. (Young tétel (230).)

Másrészt vegyük észre, hogy most a tiszta másodrendű parciális deriváltak összege minden (x, y) pontban nullát ad, azaz $f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) = 0$. Tehát f megoldása az úgynevezett síkbeli Laplace-differenciálegyenletnek:

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Ha ez a tulajdonság teljesül, a függvényt harmonikus függvénynek nevezzük. Tehát a síkbeli Laplace egyenlet megoldásai a harmonikus függvények. Nagy szerepet játszanak az ilyen függvények a komplex függvénytanban és a potenciálelméletben. És most általánosságban is definiáljuk a másodrendű parciális deriváltakat!

Definíció

A $g(\mathbf{x}) = f'_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}}$ n -változós függvény x_j változó szerinti parciális derivált függvényét az f i -edik és j -edik változója szerinti **másodrendű parciális deriváltjának** nevezzük (ha létezik). A következő jelöléseket használjuk:

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = D_j D_i f = D_{ij} f.$$

Magasabbrendű parciális deriváltak értelemszerűen definiálhatók.

Ha $i = j$, akkor **tiszta**, különben **vegyes másodrendű parciális derivált**ról beszélünk.

Definíció

Ha f (totálisan) deriválható valamely $B(\mathbf{a})$ -ban, és (elsőrendű) parciális deriváltjai (totálisan) deriválhatók $\mathbf{a}$ -ban, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban.

Magasabbrendű deriválhatóság értelemszerűen definiálható.

Feladat

Mutassuk meg, hogy $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$, ha

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0)! \end{cases}$$

A következő tétel azt mutatja, hogy bizonyos feltételek mellett, nem kell a deriválás sorrendjére figyelni.

Tétel (Young)

Ha f kétszer (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban, akkor $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right|_{\mathbf{a}} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{a}}.$$

Hasonló mondható magasabbrendű vegyes paricálisakra is. Ha például f kétváltozós függvény háromszor (totálisan) deriválható, akkor

$$f'''_{xxy}(\mathbf{a}) = f'''_{xyx}(\mathbf{a}) = f'''_{yxx}(\mathbf{a}).$$

Vagy ha f háromváltozós függvény háromszor (totálisan) deriválható, akkor

$$f'''_{xyz}(\mathbf{a}) = f'''_{xzy}(\mathbf{a}) = f'''_{yxz}(\mathbf{a}) = f'''_{yzx}(\mathbf{a}) = f'''_{zxy}(\mathbf{a}) = f'''_{zyx}(\mathbf{a}).$$

Az r -szeres folytonos deriválhatóságot az egyváltozós esethez hasonlóan az r -edik derivált folytonosságaként lehetne definiálni, de az ehhez szükséges fogalmakra nincs szükségünk, ha a következő definíciót mondjuk.

Definíció

Azt mondjuk, hogy f r -szer folytonosan deriválható a $D \subset \text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon, ha r -edrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak D -n.

Jelölés: $f \in C_D^r$.

Megjegyzés

Ha $D \subset \text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f \in C_D^r$, és $\mathbf{a} \in D$, akkor f r -szer deriválható $\mathbf{a}$ -ban.

Ha $q \leq r$, akkor $C_D^r \subset C_D^q$.

Megjegyzés (Másodrendű totális derivált)

Legyen most f n -változós valós értékű függvény, amely $\mathbf{a}$ -ban kétszer totálisan deriválható. A fentiek szerint ekkor

$$f'(\mathbf{a}) = \text{grad}^T f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Mivel $\mathbb{R}^{1 \times n}$ egy n -dimenziós vektortér (ami izomorf $\mathbb{R}^n$ -nel), ezért f kétszeres deriválhatósága miatt f' deriválható valamely $B_{\mathbf{a}}$ -n, így f' itt értelmezve van és azonosítható $B_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}^n$ -t $\mathbb{R}^n$ -be képző függvénnyel. Ennek koordinátafüggvényei f parciális deriváltjai, melyek f kétszeres deriválhatósága miatt totálisan deriválhatók $\mathbf{a}$ -ban, így (211) Tétel szerint f' is totálisan deriválható $\mathbf{a}$ -ban. Ekkor f' deriváltja $\mathbf{a}$ -ban (azaz f' Jacobi-mátrixa)

$$f''(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{a}}.$$

Ezt f **Hesse-mátrix**ának hívjuk, ami a Young-tétel (230) miatt szimmetrikus.

Definíció

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \text{int } D$, és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbf{a}$ -ban k -szor deriválható, akkor a

$$d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_1 \dots i_k} f(\mathbf{a}) h_{i_1} \dots h_{i_k}$$

értéket az függvény $\mathbf{a}$ -beli k -adik differenciáljának nevezzük.

Megjegyzés

$k = 1$ esetén $df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$,

$k = 2$ esetén $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \cdot f''(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \langle \mathbf{h}, f''(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} \rangle$.

Tétel

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ k -szor deriválható, $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, és $g_k(\mathbf{x}) = d^k f(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, akkor

1. $k > 1$ esetén $d^k f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = dg_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{h})$;
2. Rögzített $\mathbf{a} \in D$ esetén $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ deriválható k -szor, még hozzá

$$F^{(k)}(t) = d^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}, \mathbf{h}).$$

Feladat

Határozzuk meg az $f(x, y)$ függvény $\mathbf{a}$ ponthoz tartozó első-, másod- és harmadrendű differenciáljait!

1. $f(x, y) = \sin(2x) + \cos y$, $\mathbf{a} = (0, 0)$
2. $f(x, y) = xe^y + 1$, $\mathbf{a} = (1, 0)$

Tétel (Taylor)

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és konvex, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $(k + 1)$ -szer deriválható, $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in D$, $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$!
Ekkor létezik $\xi \in]0, 1[$ amire

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \frac{df(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{1!} + \cdots + \frac{d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{k!} + \frac{d^{k+1} f(\mathbf{a} + \xi \mathbf{h}, \mathbf{h})}{(k + 1)!}$$

Feladat

Határozzuk meg az $f(x, y)$ függvény $\mathbf{a}$ ponthoz tartozó harmadrendű Taylor-polinomját, és az elsőrendű Taylor-polinomhoz tartozó maradéktagot!

1. $f(x, y) = \sin(2x) + \cos y$, $\mathbf{a} = (0, 0)$
2. $f(x, y) = xe^y + 1$, $\mathbf{a} = (1, 0)$

Feladat

Határozzuk meg $0.99^{1.03}$ értékét közelítőleg!

Definíció

Legyen $\mathbf{a}$ belső pontja Dom_f -nek! Azt mondjuk, hogy f -nek **lokális minimuma** (illetve **maximuma**) van $\mathbf{a}$ -ban, ha $\exists \dot{B}(\mathbf{a}) \subset \text{Dom}_f$, hogy

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \quad (\text{illetve } f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{x} \in \dot{B}(\mathbf{a}))$$

Szigorú egyenlőtlenség esetén **szigorú lokális minimumról** (illetve **maximumról**) beszélünk.

Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele)

Legyen $\mathbf{a}$ belső pontja Dom_f -nek! Ha f -nek lokális szélsőértéke van $\mathbf{a}$ -ban, és létezik valamelyik változó szerinti parciális deriváltja, akkor az 0.

Következmény

Ha f -nek $\mathbf{a}$ -ban lokális szélsőértéke van, és ott (totálisan) deriválható, akkor

$$\text{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

A következő példa azt mutatja, hogy a feltétel nem elégséges.

Példa

Tekintsük az

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

függvényt!

$$f'_x(x, y) = -2x(y - 2x^2) - 4x(y - x^2), \quad f'_y(x, y) = (y - 2x^2) + (y - x^2)$$

Mivel mindkettő folytonos, f (totálisan) deriválható, és $\text{grad}f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, mégis f -nek nincs lokális szélsőértéke $(0, 0)$ -ban, mert $f(0, 0) = 0$, ugyanakkor a függvény a $(0, 0)$ pont minden környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is.

Ugyanis az $y = 2x^2$ parabola feletti pontokban, és az $y = x^2$ parabola alatti pontokban $f(x, y) > 0$. A két parabola között viszont $f(x, y) < 0$.

Ennek ellenére, ha a felületből az x, y síkra merőleges, az origón átmenő síkokkal kimetszünk felületi görbéket, akkor f -nek minden ilyen felületi görbe mentén lokális minimuma van.

Ugyanis a metszetgörbe pontjaiban a függvényérték pozitív, legalábbis az origó egy átszúrt környezetében.

Definíció

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kvadratikus mátrixot **pozitív (negatív) definitnek** nevezzük, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ esetén

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A \mathbf{x} \rangle > 0 \quad \left(\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A \mathbf{x} \rangle < 0 \right).$$

Ha a $>$ (illetve $<$) helyett $\geq$ (illetve $\leq$) szerepel, akkor **pozitív (illetve negatív) szemidefinitnek** nevezzük a mátrixot.

Végül azt mondjuk, hogy a mátrix **indefinit**, ha nem szemidefinit.

Megjegyzés

Az egyváltozós esethez hasonlóan adunk elégséges feltételt lokális szélsőértékre, ami most egy szükséges feltételt is tartalmaz.

Egy n -változós függvény második deriváltja a Hesse-mátrix lesz. A Hesse-mátrix pontosan akkor pozitív (negatív) definit, ha $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) > (<) 0$ minden $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ esetén.

A H Hesse-mátrix pontosan akkor indefinit, ha $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, amire

$$d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A \mathbf{x} \rangle < 0 < \langle \mathbf{y}, A \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T A \mathbf{y} = d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{y}).$$

Tétel (Lokális szélsőérték másodrendű feltételei)

Legyen f kétszer (totálisan) deriválható $\mathbf{a}$ -ban!

- 1. Ha $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}^T$ és $f''(\mathbf{a})$ pozitív definit, akkor f -nek $\mathbf{a}$ -ban lokális minimuma van.*
- 2. Ha $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}^T$ és $f''(\mathbf{a})$ negatív definit, akkor f -nek $\mathbf{a}$ -ban lokális maximuma van.*
- 3. Ha $f''(\mathbf{a})$ indefinit, akkor f -nek $\mathbf{a}$ -ban nincs lokális szélsőértéke.*

Definíció

Legyen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, és $1 \leq i \leq n$! Az A mátrix i -edik **sarokminorjának** nevezzük, és M_i -vel jelöljük a bal felső $i \times i$ típusú mátrix determinánsát.

$$M_i = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{bmatrix}$$

Tétel (Sylvester-kritérium)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix pontosan akkor

- ▶ pozitív definit, ha $M_i > 0$
- ▶ negatív definit, ha $(-1)^i M_i > 0$

minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

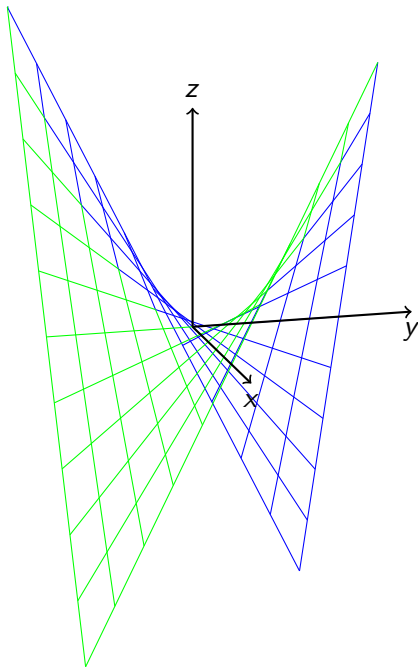
Továbbá, ha létezik i, j úgy, hogy $M_i < 0$, és $(-1)^j M_j < 0$, akkor A indefinit.

Feladat

Van-e lokális szélsőértéke az

$$f(x, y) = xy$$

függvénynek?



Feladat

Keressük meg az

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 1$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

A 241 Tétel kétváltozós függvény esetében a következőt adja.

Tétel (Lokális szélsőérték másodrendű feltételei)

Legyen f kétszer (totálisan) deriválható (x, y) -ban!

Ha $f'(x, y) = 0$ és $\det f''(x, y) > 0$, akkor itt van lokális szélsőérték, méghozzá ha

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) > 0, & \text{akkor lokális minimum} \\ f''_{xx}(x, y) < 0, & \text{akkor lokális maximum.} \end{cases}$$

Ha $\det f''(x, y) < 0$, akkor itt nincs lokális szélsőérték.

Megjegyzés

A Hesse-mátrix szimmetriája miatt ha $\det(H) > 0$, akkor $f''_{xx} = 0$ nem lehet, továbbá ilyenkor f''_{xx} és f''_{yy} azonos előjelű.

Ha $f' = 0$ és $\det(H) = 0$, akkor a tétel alapján nem derül ki, van-e szélsőérték.

Feladat

Keressük meg az $f(x, y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y$ függvény lokális szélsőértékeit!

Feladat

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2y^3$ lokális szélsőértékeit!

Feladat

1. Határozzuk meg az $f(x, y) = y^2(1 - x^2 - y^2)$ függvény lokális szélsőértékhelyeit!
2. Határozzuk meg a függvény minimumát és maximumát – ha létezik – az $x^2 + y^2 \leq 1$ tartományon!

Feladat

1. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 + y^3 - x - y$ függvény lokális szélsőértékeit!
2. Létezik-e f -nek legnagyobb és legkisebb értéke az

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}; 0 \leq y \leq 1 - x; 0 \leq x \leq 1\}$$

tartományon? Ha igen, keressük meg!

Keressük az $f(x, y) = 10(x^4 - y^3)$ függvény szélsőértékeit a $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 2$ feltétel mellett.

Definíció

Legyen $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható, $\mathbf{a} \in D$ és $c \in \text{Ran}_g$! Azt mondjuk, hogy f -nek feltételes lokális maximuma (minimuma) van $\mathbf{a}$ -ban a $g(\mathbf{x}) = c$ feltétel mellett, ha $g(\mathbf{a}) = c$ és $f|_{g^{-1}(c)}$ függvénynek $\mathbf{a}$ -ban lokális maximuma (minimuma) van, azaz létezik $B(\mathbf{a}) \subset D$ úgy, hogy $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}) \cap g^{-1}(c)$ esetén $f(\mathbf{a}) \geq (\leq) f(\mathbf{x})$.

Tétel

Ha a definícióbeli f -nek feltételes lokális szélsőértéke van $g = c$ feltétel mellett $\mathbf{a}$ -ban, akkor $\text{grad}f(\mathbf{a})$ és $\text{grad}g(\mathbf{a})$ lineárisan összefüggőek.

Megjegyzés

- ▶ Tehát létezik $(\lambda_f, \lambda_g) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, amire $\lambda_f \text{grad}f(\mathbf{a}) + \lambda_g \text{grad}g(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- ▶ Ekkor $\text{grad}g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ esetén létezik $\lambda \in \mathbb{R}$, amire $\text{grad}f(\mathbf{a}) = \lambda \text{grad}g(\mathbf{a})$. Ezt a λ -t fogjuk Lagrange-féle multiplikatornak nevezni.
- ▶ Lokális maximum esetén $\lambda \geq 0$, lokális minimum esetén $\lambda \leq 0$.
- ▶ $g^{-1}(c)$ többnyire nem nyílt, esetleg egyáltalán nincs belső pontja, így egyszerű szélsőérték keresésre nem alkalmazhatók a korábbi tételek.

Feladat

Határozzuk meg az $f(x, y) = 10(x^4 - y^3)$ függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 2$ feltétel mellett.

Több feltételre is kimondható a tétel.

Tétel

Legyen $n > k$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ folytonosan deriválható, $\mathbf{a} \in D$ és $\mathbf{c} \in \text{Rang}_{\mathbf{g}}$! Ha f -nek feltételes lokális szélsőértéke van $\mathbf{a}$ -ban a $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ feltétel mellett, akkor $\text{grad}f(\mathbf{a}), \text{grad}g_1(\mathbf{a}), \dots, \text{grad}g_k(\mathbf{a})$ lineárisan összefüggőek, azaz $A = \begin{bmatrix} f'(\mathbf{a}) \\ \mathbf{g}'(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times n}$ esetén $\text{Rang } A \leq k$.

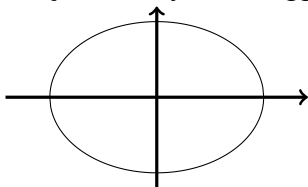
Megjegyzés

- ▶ Ha $\text{Rang } \mathbf{g}'(\mathbf{a}) = k$, akkor ez is felírható Lagrange-féle mutliplikátorokkal:
 $\exists L \in \mathbb{R}^{1 \times k} : f'(\mathbf{a}) = L \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{a})$, azaz $L = [\lambda_1 \dots \lambda_k]$ jelöléssel $n + k$ ismeretlen $\text{grad}f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \text{grad}g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_k \text{grad}g_k(\mathbf{a})$ (n egyenlet) és $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$ (k egyenlet).
- ▶ Utóbbit úgy is írhatjuk, hogy $F : D \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\mathbf{x})$ függvény összes parciális deriváltja 0, azaz $\text{grad}F(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+k}$.

Feladat

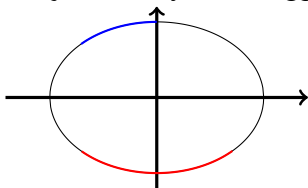
Határozzuk meg az $f(x, y, z) = xy^2z^3$ függvény feltételes lokális szélsőérték helyeit a $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és $g_2(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ feltételek mellett.

Kifejezhető-e y az x függvényében egy $f(x, y) = 0$ implicit egyenletből?



Például az $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2 = 0$ egyenlettel adott görbe nem egy $y = g(x)$ függvény grafikonja, de darabjai igen.

Kifejezhető-e y az x függvényében egy $f(x, y) = 0$ implicit egyenletből?



Például az $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2 = 0$ egyenlettel adott görbe nem egy $y = g(x)$ függvény grafikonja, de darabjai igen.

A kék rész például $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$.

A piros rész pedig $y = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$.

Tétel

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt, $\mathbf{a} \in D$, $b \in I$, $f : D \times I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos úgy, hogy $f(\mathbf{a}, b) = 0$!
Ha minden $\mathbf{x} \in D$ esetén $h_{\mathbf{x}}(y) = f(\mathbf{x}, y)$ szigorúan monoton, akkor létezik $B(\mathbf{a}) \subset D$ és $g : B(\mathbf{a}) \rightarrow I$ folytonos úgy, hogy $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a})$ és $y \in I$ esetén

$$f(\mathbf{x}, y) = 0 \iff y = g(\mathbf{x}).$$

Megjegyzés

Ha $D = I = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2$, akkor h_x nem monoton.

Ha $D = \mathbb{R}$, de $I = [0, \infty[$ (vagy $I =]-\infty, 0]$), $f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2$, akkor h_x szigorúan monoton növekvő (monoton csökkenő).

Feladat

1. $n = 1$, $D = \mathbb{R}$, $I =]0, \infty[$, $f(x, y) = x + e^x - (y + \ln y)$ esetén mit mond a tétel? (például $f(0, 1) = 0$)
2. $n = 1$, $D = \mathbb{R}$, $I =]0, \infty[$, $f(x, y) = x + e^x - (y + 2 \ln y)$ esetén mit mond a tétel? (például $f(0, 1) = 0$)

Tétel (Implicit függvénytétel (1-dimenzióban))

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt, $\mathbf{a} \in D$, $b \in I$, $f : D \times I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható úgy, hogy $f(\mathbf{a}, b) = 0$!

Ha $D_{n+1}f(\mathbf{a}, b) \neq 0$, akkor létezik $B(\mathbf{a}) \subset D$, $B(b) \subset I$ és $g : B(\mathbf{a}) \rightarrow B(b)$ folytonosan deriválható úgy, hogy $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a})$ és $y \in B(b)$ esetén

$$f(\mathbf{x}, y) = 0 \iff y = g(\mathbf{x}).$$

$$\text{Továbbá, } g'(\mathbf{x}) = -\frac{1}{D_{n+1}f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))} \begin{bmatrix} D_1f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) & \dots & D_nf(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés

- ▶ Ha f k -szor folytonosan deriválható, akkor g is k -szor folytonosan deriválható.
- ▶ Ha f folytonosan deriválhatóságát csak $(\mathbf{a}, b)$ -ben tesszük fel (egy gömbkörnyezetben deriválható), a tétel akkor is igaz marad, de g folytonosan deriválhatóságát is csak $\mathbf{a}$ -ban tudjuk biztosítani.

Tétel (Implicit függvénytétel (k -dimenzióban))

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, $\mathbf{a} \in D$, $\mathbf{b} \in I$, $\mathbf{f} : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^k$ folytonosan deriválható úgy, hogy $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$!

Ha $A = \begin{bmatrix} D_{n+1}\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \dots & D_{n+k}\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{bmatrix}$ reguláris, akkor létezik $B(\mathbf{a}) \subset D$, $B(\mathbf{b}) \subset I$ és $\mathbf{g} : B(\mathbf{a}) \rightarrow B(\mathbf{b})$ folytonosan deriválható úgy, hogy $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a})$ és $\mathbf{y} \in B(\mathbf{b})$ esetén

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Továbbá, $\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = -A^{-1} \begin{bmatrix} D_1\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \dots & D_n\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{bmatrix}$.

Megjegyzés

- ▶ Ha $\mathbf{f}$ k -szor folytonosan deriválható, akkor $\mathbf{g}$ is k -szor folytonos deriválható.
- ▶ Ha $\mathbf{f}$ folytonos deriválhatóságát csak $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ -ben tesszük fel (egy gömbkörnyezetben deriválható), a tétel akkor is igaz marad, de $\mathbf{g}$ folytonos deriválhatóságát is csak $\mathbf{a}$ -ban tudjuk biztosítani.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az X_k mátrixsorozat **határértéke** az A mátrix, ha elemenként $\lim X_k(i, j) = A(i, j)$.

A $D \subset \mathbb{R}^{n \times m}$ **halmaz torlódási pontjának** nevezzük az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixot, ha létezik $D \setminus \{A\}$ -beli mátrixsorozat, melynek határértéke A .

Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n \times m}$ halmaz torlódási pontja az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrix, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q}$ és $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$.

Azt mondjuk, hogy $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = B$, ha minden $D \setminus \{A\}$ -beli X_k sorozatra

$$X_k \rightarrow A \implies f(X_k) \rightarrow B.$$

Legyen $A \in D \subset \mathbb{R}^{n \times m}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q}$. Azt mondjuk, hogy f **folytonos** A -ban, ha minden D -beli X_k sorozatra $X_k \rightarrow A \implies f(X_k) \rightarrow f(A)$.

Tétel

A mátrix determináns folytonos függvény. (ld Leibniz-formula)

A mátrixinvertálás folytonos függvénye a reguláris mátrixoknak. (adjungált transzponáltja osztva a determinánssal)

Definíció

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt!

Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt **regulárisnak** nevezzük, ha folytonosan deriválható, és $\det(f'(\mathbf{x})) \neq 0$ teljesül minden $\mathbf{x} \in D$ esetén.

Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt **lokálisan invertálhatónak** nevezzük, ha minden $\mathbf{a} \in D$ pontnak van olyan $B(\mathbf{a}) \subset D$ gömbkörnyezete, melyre $f|_{B(\mathbf{a})}$ invertálható.

Tétel (A lokális invertálhatóság elégséges feltétele)

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, és $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguláris, akkor lokálisan invertálható.

Megjegyzés

- ▶ A $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ egyenlet (egyenletrendszer) megoldható, azaz $\mathbf{x}$ kifejezhető $\mathbf{y}$ -ból (lokálisan). Például az $f(x) = x^5 + x^3 + 3x = y$ egyenlet (mivel $f'(x) > 0$) megoldható lokálisan egyértelműen, azaz ha $f(a) = b$, és y közel van b -hez, akkor létezik pontosan 1 db x az a közelében, amire $f(x) = y$.
- ▶ Ha a tételbeli $\mathbf{f}$ függvényről csak egy $\mathbf{a}$ pontban tesszük fel, hogy deriváltmátrixa reguláris (de $\mathbf{f}$ folytonosan deriválható D -n), akkor mondhatjuk, hogy létezik $B(\mathbf{a})$, amin $\mathbf{f}$ invertálható.

Tétel (Inverzfüggvény regularitása)

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, és $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguláris és invertálható, akkor $R = \text{Ran}_{\mathbf{f}} \subset \mathbb{R}^n$ is nyílt, és $\mathbf{f}$ inverze is reguláris. Továbbá bármely $\mathbf{a} \in D$ esetén $(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{f}(\mathbf{a})) = (\mathbf{f}'(\mathbf{a}))^{-1}$

Megjegyzés

Például az $f(x) = x^5 + x^3 + 3x = y$ egyenlet x megoldása folytonos sőt reguláris függvénye y -nak.

Az előző tételek szerint könnyen látható a következő.

Tétel (Inverz függvénytétel)

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, és $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguláris, akkor lokálisan invertálható, és a lokális inverzek is regulárisak.

Megjegyzés

- ▶ A tétel szerint minden $\mathbf{a} \in D$ esetén létezik $B(\mathbf{a}) = U \subset D$ és $V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt úgy, hogy $\mathbf{g} = \mathbf{f}|_U : U \rightarrow V$ bijekció, amire $\mathbf{g}^{-1} : V \rightarrow U$ szintén reguláris.
- ▶ A bizonyításokból láthatóan, ha a tételbeli $\mathbf{f}$ függvényről csak egy $\mathbf{a}$ pontban tesszük fel, hogy deriváltmátrixa reguláris (de $\mathbf{f}$ folytonosan deriválható D -n), akkor mondhatjuk, hogy létezik $B(\mathbf{a})$, amin $\mathbf{f}$ invertálható, és inverze reguláris $\mathbf{f}(B(\mathbf{a}))$ -n.

Az előző tételek szerint könnyen látható a következő.

Tétel (Inverz függvénytétel)

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, és $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguláris, akkor lokálisan invertálható, és a lokális inverzek is regulárisak.

Megjegyzés

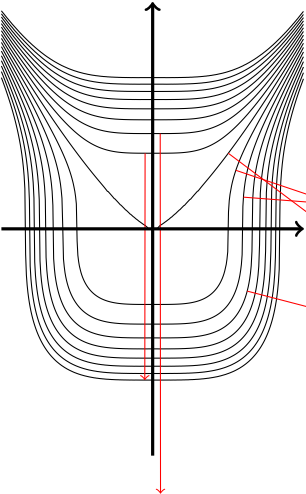
- Az **Implicit függvénytétel (k -dimenzióban)** is levezethető a fenti tételből. $D \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, $\mathbf{a} \in D$, $\mathbf{b} \in I$, $\mathbf{f} : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^k$ folytonosan deriválható úgy, hogy $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$! Ha $A = \begin{bmatrix} D_{n+1}\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \dots & D_{n+k}\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{bmatrix}$ reguláris, akkor $\mathbf{F} : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \text{ deriválható, } \mathbf{F}' = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ B & A \end{bmatrix}, \text{ ahol } B = \begin{bmatrix} D_1\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \dots & D_n\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{F}'$ folytonos, $\det \mathbf{F}' = \det A \neq 0$, így alkalmazható az inverz függvénytétel. Létezik $U = B(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset D \times I$ és $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ nyílt úgy, hogy $\mathbf{G} = \mathbf{F}|_U : U \rightarrow V$ bijekció, amire $\mathbf{G}^{-1} : V \rightarrow U$ reguláris.

Jelölje $\mathbf{h} : V \rightarrow I$ a $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvény utolsó k koordinátafüggvényéből álló vektorfüggvényt. Ekkor $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \mathbf{y}$, és $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ a keresett függvény.

Formálisan bevezetjük a $\nabla = (D_1, D_2, D_3)$ jelölést. Legyen továbbá $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, és az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre használjuk a **skalármező**, míg a $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényre a **vektormező** elnevezést.



Definíció

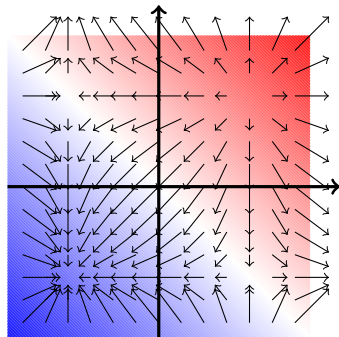
Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ deriválható skalármező **gradiensének** nevezzük a $\text{grad} f = (D_1 f, D_2 f, D_3 f)$ vektormezőt.

Skálárral való szorzás (bal oldalon a vektor, jobb oldalon a skálár).
 $\text{grad} f = \nabla \cdot f$.

A gradiensvektor a szintalakzatra (kétdimenzióban szintvonal) merőleges, a növekvő szintalakzatok irányába mutat, hossza a szintalakzatok növekedési sebessége.

Az ábrán az $f(x, y) = x^4 - y^3$ függvény néhány szintvonala, és néhány gradiensvektora látható. $\text{grad} f(x, y) = (4x^3, -3y^2)$

Formálisan bevezetjük a $\nabla = (D_1, D_2, D_3)$ jelölést. Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, és használjuk az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre a **skalármező**, míg a $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényre a **vektormező** elnevezést.



Definíció

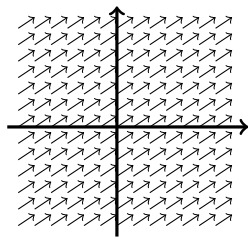
Az $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ deriválható vektormező **divergenciájának** nevezzük a $\operatorname{div} \mathbf{f} = D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3$ skalármezőt.

Skálárszorzat. $\operatorname{div} \mathbf{f} = \langle \nabla, \mathbf{f} \rangle$.

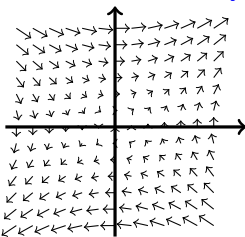
A divergencia a kiáramlás - beáramlás. Pozitív ha forrás, negatív ha elnyelő. Két dimenzióban $\operatorname{div} \mathbf{f} = D_1 f_1 + D_2 f_2$.

Az ábrán az $\mathbf{f}(x, y) = (\frac{x^2}{2} - 0.18, \frac{y^2}{2} - 0.18)$ vektormező látható.

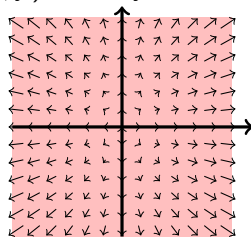
Piros a forrás, kék az elnyelő. $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) = x + y$



konstans vektormező
forrásmentes

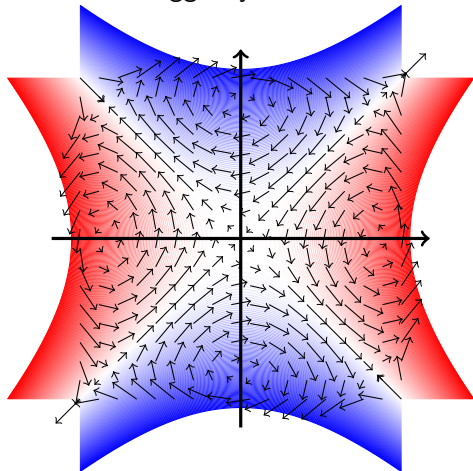


$\mathbf{f}(x, y) = 0.05(3y, 2x)$
is forrásmentes



$\mathbf{f}(x, y) = 0.05(3x, 2y)$
állandó forrás

Formálisan bevezetjük a $\nabla = (D_1, D_2, D_3)$ jelölést. Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, és használjuk az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre a **skalármező**, míg a $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényre a **vektormező** elnevezést.



Definíció

Az $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ deriválható vektormező **rotációjának** nevezzük a

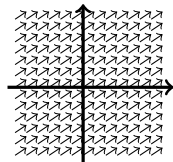
$\text{rot} \mathbf{f} = (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$ vektormezőt.

Vektoriális szorzat. $\text{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}$.

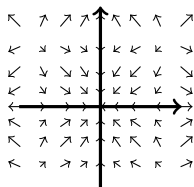
Az ábrán az $\mathbf{f}(x, y) = \frac{3}{100}(y^3 - 13y, x^3 - 13x)$ vektormező látható. Két dimenzióban a rotáció skalárértékű $\text{rot} \mathbf{f}(x, y) = D_1 f_2 - D_2 f_1$. **Piros a pozitív, kék a negatív.**

$$\text{rot} \mathbf{f}(x, y) = 3x^2 - 13 - (3y^2 - 13) = 3(x^2 - y^2)$$

konstans vektormező
örvénymentes



az $\mathbf{f}(x, y) = \frac{3}{100}(x^3 - 13x, y^3 - 13y)$ vektormező is örvénymentes



Formálisan bevezetjük a $\nabla = (D_1, D_2, D_3)$ jelölést. Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, és használjuk az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre a **skalármező**, míg a $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényre a **vektormező** elnevezést.

Definíció

Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer deriválható skalármező **Laplace-operátor**ának nevezzük a $\Delta f = D_{11}f + D_{22}f + D_{33}f$ skalármezőt.

Skaláris szorzat $\Delta = \langle \nabla, \nabla \rangle$.

Gradiens, divergencia, rotáció

Tétel

Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}, \mathbf{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ deriválhatóak, akkor

- ▶ $\text{grad}(f + g) = \text{grad}f + \text{grad}g$;
- ▶ $\text{div}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \text{div}\mathbf{v} + \text{div}\mathbf{w}$;
- ▶ $\text{rot}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \text{rot}\mathbf{v} + \text{rot}\mathbf{w}$;
- ▶ $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$;
- ▶ $\text{div}f\mathbf{v} = \mathbf{v}\text{grad}f + f\text{div}\mathbf{v}$;
- ▶ $\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w}\text{rot}\mathbf{v} - \mathbf{v}\text{rot}\mathbf{w}$;
- ▶ $\Delta f = \text{div}(\text{grad}f)$;
- ▶ $\text{grad}(\alpha f) = \alpha \text{grad}f$;
- ▶ $\text{div}(\alpha \mathbf{v}) = \alpha \text{div}\mathbf{v}$;
- ▶ $\text{rot}(\alpha \mathbf{v}) = \alpha \text{rot}\mathbf{v}$;
- ▶ $\Delta(\alpha f) = \alpha \Delta f$;
- ▶ $\text{rot}f\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \text{grad}f + f\text{rot}\mathbf{v}$;
- ▶ $\text{rotrot}\mathbf{v} = \text{graddiv}\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}$;
- ▶ $\Delta\mathbf{v} = \text{grad}(\text{div}\mathbf{v}) - \text{rot}(\text{rot}\mathbf{v})$;

ha f és $\mathbf{v}$ kétszer deriválható, akkor

- ▶ $\text{divrot}\mathbf{v} = 0$;
- ▶ $\text{rotgrad}f = \mathbf{0}$;

Megjegyzés

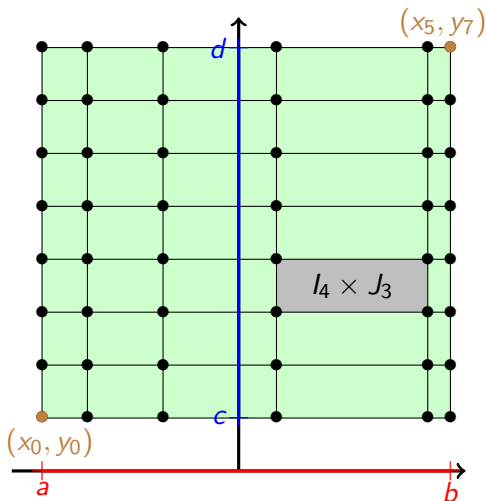
Kétváltozós függvények integrálját kettős integrálnak is nevezzük.

Két dimenzióban téglának olyan téglalapokat nevezünk, melyek oldalai tengelypárhuzamosak. Ilyen az integrált az egyváltozós esethez teljesen hasonlóan értelmezzük.

A továbbiakban feltesszük, hogy $a < b$ és $c < d$, illetve $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, ahol $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $J = [c, d] \subset \mathbb{R}$ és $Q = I \times J \subset \mathbb{R}^2$.

Néhány további definíció.

- ▶ **Osztópontok** $\bullet$: (x_k, y_l) , ahol $k = 0, 1, \dots, p$ illetve $l = 0, 1, \dots, q$ úgy, hogy $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$, illetve $c = y_0 < y_1 < \dots < y_q = d$.
- ▶ $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ illetve $J_l = [y_{l-1}, y_l]$ jelölésekkel a k, l -edik **résztegla** $I_k \times J_l$ **mértéke** (területe) $\Delta_{kl} = (x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1}) > 0$, ahol $k = 1, \dots, p$, $l = 1, \dots, q$.



- ▶ $Q = I \times J$ egy **felosztása** $F = \{x_0, x_1, \dots, x_p\} \times \{y_0, y_1, \dots, y_q\}$ az osztópontok halmaza.

- Alsó közelítő összeg, vagy alsó összeg (F felosztáshoz tartozik)

$$s_F = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q m_{kl} \Delta_{kl}, \text{ ahol } m_{kl} = \inf\{f(x, y) : x \in I_k, y \in J_l\}.$$

- Felső közelítő összeg, vagy felső összeg (F felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q M_{kl} \Delta_{kl}, \text{ ahol } M_{kl} = \sup\{f(x, y) : x \in I_k, y \in J_l\}.$$

Az egyváltozós esethez hasonló tételket is kimondhatunk. Ezek bizonyítása megegyezik az ottaniakkal.

- $s_F \leq S_F$.
- $F_1 \subset F_2 \implies s_{F_1} \leq s_{F_2} \leq S_{F_2} \leq S_{F_1}$.
- F_1 és F_2 tetszőleges felosztások esetén $s_{F_1} \leq S_{F_2}$.
- $\exists h = \sup\{s_F\} \in \mathbb{R}$ és $\exists H = \inf\{S_F\} \in \mathbb{R}$. Ezeket rendre alsó illetve felső Darboux-integrálnak nevezzük.
- $h \leq H$.

Definíció

Legyen $f : Q = I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f **Riemann-integrálható** Q -n, ha $h = H$. Ezt a közös értéket az f függvény Q -n adott **Riemann-integráljának** (röviden **integráljának**) nevezzük és

$$\iint_Q f(x, y) \, d(x, y),$$

illetve

$$\int_Q f \text{ vagy } \int_Q f(x, y) \, d(x, y) \text{ vagy } \iint_Q f$$

módon jelöljük.

Tétel (Riemann-kritérium)

Az $f : Q = I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható Q -n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik F felosztás, hogy $S_F - s_F < \varepsilon$.

Most is igaz a következő.

Tétel

Ha $f : Q = I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható Q -n.

Az integrál kiszámolása. Kettős integrál kétszeres integrállá alakítása.

Tétel (Fubini-tétel téglán)

Legyen $f : Q = I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, ahol $I = [a, b]$ és $J = [c, d]$!

Ha f Riemann-integrálható Q -n, és minden $x \in I$ esetén az $y \mapsto f(x, y)$

Riemann-integrálható J -n, akkor $g(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$ is Riemann-integrálható I -n, és

$$\iint_Q f = \int_a^b g(x) \, dx.$$

Tehát ekkor

$$\iint_Q f = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Megjegyzés

Ha f folytonos, akkor minden feltétel teljesül, így ekkor igaz a tétel állítása, sőt ekkor fordított sorrendben is igaz, azaz ekkor

$$\iint_Q f = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Megjegyzés

Ha az $y \mapsto f(x, y)$ Riemann-integrálható J -n nem teljesül minden x -re, akkor helyette az alsó vagy a felső integrállal számolhatunk, vagyis ekkor

$$\iint_Q f = \int_{x=a}^b \left(\int_{\underline{y=c}}^d f(x, y) dy \right) dx = \int_{x=a}^b \left(\int_{\overline{y=c}}^d f(x, y) dy \right) dx,$$

illetve

$$\iint_Q f = \int_{y=c}^d \left(\int_{\underline{x=a}}^b f(x, y) dx \right) dy = \int_{y=c}^d \left(\int_{\overline{x=a}}^b f(x, y) dx \right) dy.$$

f Riemann-integrálhatósága Q -n ilyenkor is feltétel, de ebből következik például

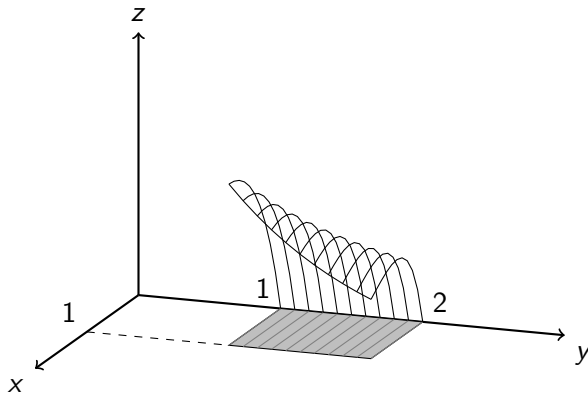
$$g(x) = \int_{\underline{y=c}}^d f(x, y) dy \text{ Riemann-integrálhatósága } I\text{-n.}$$

Feladat

Legyen $I = [0, 1]$, $J = [1, 2]$ és $T = I \times J$! Határozzuk meg az

$$\iint_T 3xe^{-xy} d(x, y)$$

integrált, ha létezik!



Feladat

Legyen $I = [1, 2]$ és $T = I^2$! Határozzuk meg az

$$\iint_T y \cos 2xy d(x, y)$$

integrált, ha létezik!

Következmény

Ha $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és $f : Q = I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x, y) = g(x)h(y)$, akkor

$$\iint_Q f = \int_I g \int_J h.$$

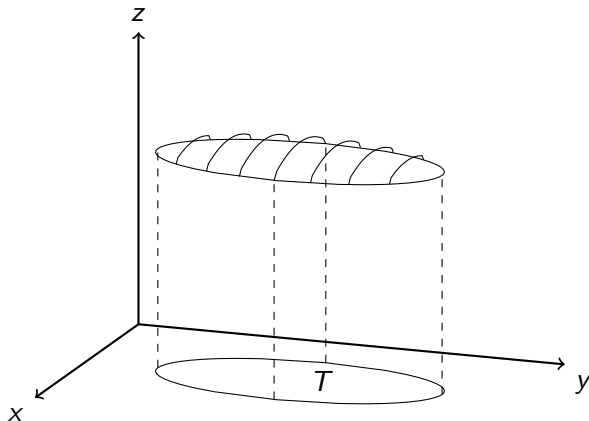
Feladat

Legyen $T = [0, 1] \times [-2, 0]$! Határozzuk meg az

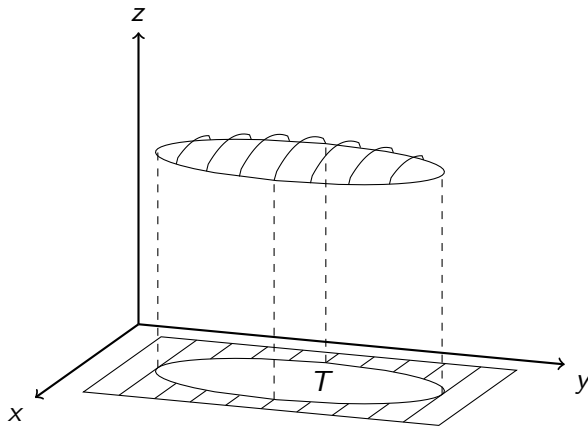
$$\iint_T xye^{3x+y^2} dT$$

integrált, ha létezik!

Most definiáljuk az integrált tetszőleges korlátos halmazon.



Most definiáljuk az integrált tetszőleges korlátos halmazon.



Definíció

Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz, és $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor léteznek $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallumok, hogy $T \subset I \times J$. Terjesszük ki f -et, azaz legyen

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{ha } (x, y) \in T, \\ 0, & \text{ha } (x, y) \notin T! \end{cases}$$

Ha g integrálható $I \times J$ -n, akkor azt mondjuk, hogy f **integrálható** T -n, és a most definiált integrál értéke a g integrálja lesz.

$$\iint_T f = \iint_{I \times J} g$$

Megjegyzés

Könnyen ellenőrizhető, hogy az integrál (és az integrálhatóság) nem függ I és J választásától.

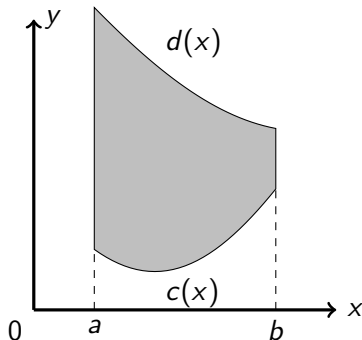
Definíció

A $T \subset \mathbb{R}^2$ tartományt **normáltartomány**nak nevezzük, a következő két esetben.

► **x tengelyre vonatkoztatott normáltartomány**

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, $c, d : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $c(x) \leq d(x)$ minden $x \in I$ esetén és

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, c(x) \leq y \leq d(x)\}.$$



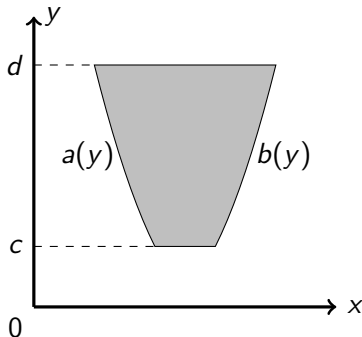
Definíció

A $T \subset \mathbb{R}^2$ tartományt **normáltartomány**nak nevezzük, a következő két esetben.

► **y tengelyre vonatkoztatott normáltartomány**

$J = [c, d] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $a(y) \leq b(y)$ minden $y \in J$ esetén és

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in J, a(y) \leq x \leq b(y)\}.$$



Megjegyzés

A gyakorlatban akkor alkalmazhatók a következőkben kimondott tételek, ha a definícióban szereplő a , b , c és d függvények elég 'szépek'.

Most is igaz a következő.

Tétel

Ha $T \subset \mathbb{R}^2$ normáltartomány $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható T -n.

Tétel (Fubini-tétel normáltartományon)

A definíció jelöléseivel:

1. Ha f integrálható a T x tengelyre vonatkoztatott normáltartományon, akkor

$$\iint_T f = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

feltéve, hogy a belső integrál is létezik minden $x \in [a, b]$ esetén.

2. Ha f integrálható a T y tengelyre vonatkoztatott normáltartományon, akkor

$$\iint_T f = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

feltéve, hogy a belső integrál is létezik minden $y \in [c, d]$ esetén.

Megjegyzés

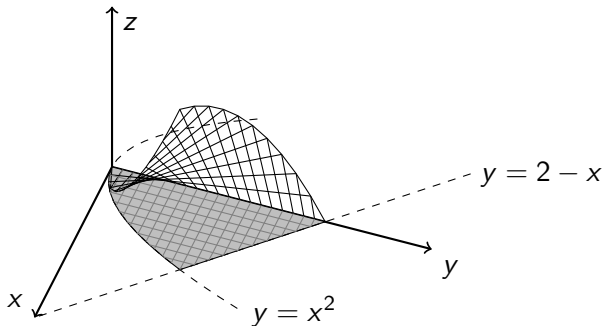
Folytonos függvényre alkalmazható a Fubini-tétel normáltartományon is.

Feladat

Legyen $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, x^2 \leq y \leq 2 - x\}$! Határozzuk meg az

$$\iint_T 2xy \, dT$$

integrált, ha létezik!



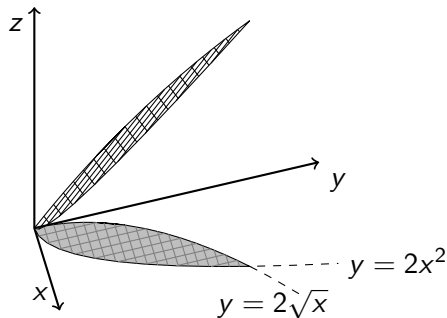
Feladat

Legyen T az $y = 2\sqrt{x}$ és az $y = 2x^2$ görbék által határolt korlátos tartomány!

1. Írjuk fel mindkét típusú normáltartományként T -t!
2. Határozzuk meg az

$$\iint_T x + 2y \, dT$$

integrált, ha létezik!



Feladat

Legyen T az $A = (0, 0)$, a $B = (5, 0)$, a $C = (4, 6)$ és a $D = (3, 6)$ pontok által meghatározott trapéz!

1. Írjuk fel mindkét típusú normáltartományként T -t!
2. Alakítsuk kétféleképpen kétszeres integrállá az

$$\iint_T e^{6x+y} dT$$

kettős integrált!

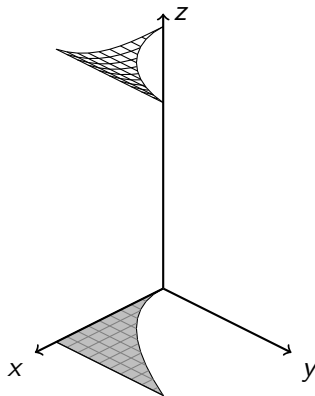
3. Határozzuk meg az integrált, ha létezik!

Feladat

Az integrálás sorrendjének felcserélésével határozzuk meg az

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{4+x^3} \, dx \, dy$$

integrált!



Megjegyzés

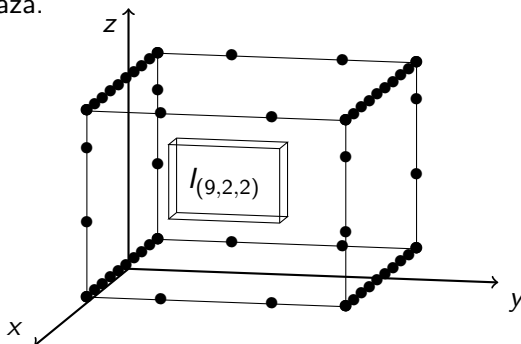
Normáltartományok esetén az integrálás sorrendje kötött. Kívül a határok állandók, csak a belső integrál határai lehetnek függvények, és csak a külső integrál változójától függhetnek. A sorrend felcserélése a határok átalakításával jár.

A továbbiakban feltesszük, hogy $a_i < b_i$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén, illetve $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, ahol $I_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, és $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ téglá.

Néhány további definíció

- ▶ **Osztópontok:** $(x_{1k_1}, x_{2k_2}, \dots, x_{nk_n})$, ahol minden $i = 1, \dots, n$ esetén $k_i = 0, 1, \dots, p_i$ úgy, hogy $a_i = x_{i0} < x_{i1} < \dots < x_{ip_i} = b_i$.
- ▶ $I_{ik_i} = [x_{ik_i-1}, x_{ik_i}]$ jelölésekkel a $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ -edik **részteglá** $I_{\mathbf{k}} = I_{1k_1} \times \dots \times I_{nk_n}$ **mértéke** $\Delta_{\mathbf{k}} = (x_{1k_1} - x_{1k_1-1}) \cdot \dots \cdot (x_{nk_n} - x_{nk_n-1}) > 0$.
- ▶ Q egy **felosztása** $F = \{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1p_1}\} \times \dots \times \{x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{np_n}\}$

az osztópontok halmaza.



- ▶ Alsó közelítő összeg, vagy alsó összeg (F felosztáshoz tartozik)

$$s_F = \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} m_k \Delta_k, \text{ ahol } m_k = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in I_k\}.$$

- ▶ Felső közelítő összeg, vagy felső összeg (F felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} M_k \Delta_k, \text{ ahol } M_k = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in I_k\}.$$

Az egyváltozós esethez hasonló tételeket is kimondhatunk. Ezek bizonyítása megegyezik az ottaniakkal.

- ▶ $s_F \leq S_F$.
- ▶ $F_1 \subset F_2 \implies s_{F_1} \leq s_{F_2} \leq S_{F_2} \leq S_{F_1}$.
- ▶ F_1 és F_2 tetszőleges felosztások esetén $s_{F_1} \leq S_{F_2}$.
- ▶ $\exists h = \sup\{s_F\} \in \mathbb{R}$ és $\exists H = \inf\{S_F\} \in \mathbb{R}$. Ezeket rendre alsó illetve felső Darboux-integrálnak nevezzük.
- ▶ $h \leq H$.

Definíció

Legyen $f : Q = I_1 \times \cdots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f **Riemann-integrálható** Q -n, ha $h = H$. Ezt a közös értéket az f függvény Q -n adott **Riemann-integráljának** (röviden **integráljának**) nevezzük és

$$\int_Q f \text{ vagy } \int_Q f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

módon jelöljük.

Lemma (Riemann-kritérium)

Az $f : Q = I_1 \times \cdots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható Q -n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik F felosztás, hogy $S_F - s_F < \varepsilon$.

Tétel

Ha $f : Q = I_1 \times \cdots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható Q -n.

Tétel (Fubini-tétel téglán)

Legyen $f : Q = I_1 \times \cdots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ha f Riemann-integrálható Q -n, és minden $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$ esetén az $x_n \mapsto f(\mathbf{x})$ Riemann-integrálható I_n -n,

akkor $g(x) = \int_{a_n}^{b_n} f(\mathbf{x}) dx_n$ is Riemann-integrálható $I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$ -n, és

$$\int_Q f = \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in I_1 \times \cdots \times I_{n-1}} g(x) d(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Megjegyzés

Ha f folytonos, akkor minden feltétel teljesül, így ekkor igaz a tétel állítása. Sőt ekkor $n - 1$ -szer alkalmazhatjuk a Fubini-tételt, így kapjuk, hogy

$$\int_Q f = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \left(\int_{x_2=a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{x_n=a_n}^{b_n} f(\mathbf{x}) dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1.$$

Feladat

Legyen $V = [0, 1]^3$ az egységkocka! Határozzuk meg az

$$\iiint_V x + y + z \, d(x, y, z)$$

integrált, ha létezik!

Most definiáljuk az integrált tetszőleges korlátos halmazon.

Definíció

Legyen $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, és $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor létezik $Q \subset \mathbb{R}^n$ téglá, hogy $T \subset Q$. Terjesszük ki f -et, azaz legyen

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{ha } \mathbf{x} \in T, \\ 0, & \text{ha } \mathbf{x} \notin T! \end{cases}$$

Ha g integrálható Q -n, akkor azt mondjuk, hogy f **integrálható** T -n, és a most definiált integrál értéke a g integrálja lesz.

$$\int_T f = \int_Q g$$

Megjegyzés

Könnyen ellenőrizhető, hogy az integrál (és az integrálhatóság) nem függ Q választásától.

Az n dimenziós normáltartományt rekurzióval definiáljuk.

Definíció

$T_1 \subset \mathbb{R}$ egydimenziós normáltartomány, ha kompakt intervallum.

$T_n \subset \mathbb{R}^n$ n -dimenziós normáltartomány, ha

$$T_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in T_{n-1}, a(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq b(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

valamely $T_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ $n-1$ dimenziós normáltartomány, és $a, b : T_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények esetén, melyekre minden $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in T_{n-1}$ esetén $a(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq b(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Most is igaz a következő.

Tétel

Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ normáltartomány $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható T -n.

Normáltartományon vett integrálra is kimondható Fubini-tétele.

Tétel (Fubini-tétel normáltartományon)

A definíció jelöléseivel: Ha f integrálható a T_n normáltartományon, akkor

$$\int_{T_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{T_{n-1}} \left(\int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(\mathbf{x}) dx_n \right) d(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

feltéve, hogy a belső integrál is létezik.

Megjegyzés

Folytonos függvényre alkalmazható a Fubini-tétel akár $n - 1$ -szer is. Ekkor a következő képletet kaphatjuk, ahol $T \subset \mathbb{R}^n$ normáltartomány, $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény.

$$\int_T f = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \left(\int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \dots \left(\int_{x_n=a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(\mathbf{x}) dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1.$$

Most is fontos az integrálás sorrendje. Valamely integrál határai csak a tőle kijebbi integrálok változóitól függhetnek.

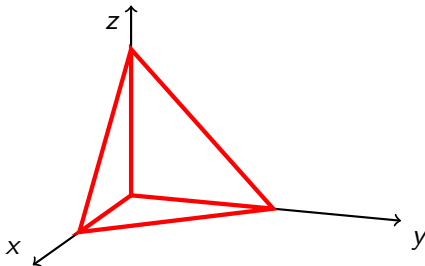
A következő példákban használjuk a dV jelölést a $d(x, y, z)$ helyett, ami a térfogati integrálra utal.

Feladat

Legyen $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \text{ és } x + y + z \leq 1\}$! Határozzuk meg az

$$\iiint_V x + y + z \, dV$$

integrált, ha létezik!



Definíció

A $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ha a konstans 1 függvény integrálható T -n, akkor a T halmazt **Jordan-mérhetőnek** nevezzük, az integrál értékét a T **Jordan-mértékének** hívjuk, és $\mathcal{J}(T)$ -vel jelöljük.

Röviden

$$\mathcal{J}(T) = \int_T 1,$$

ha létezik.

Megjegyzés

Könnyű megmutatni, hogy minden téglá Jordan-mérhető, és Jordan-mértéke az egy csúcsból induló n él hosszának szorzata. Így például egy szakasz 2 dimenziós Jordan-mértéke 0.

Szintén könnyen látható, hogy minden normáltartomány is Jordan-mérhető.

A kétdimenziós Jordan-mérték a terület általánosítása. Ha például $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos, akkor az $y = 0$, $x = a$, $x = b$ és $y = f(x)$ által határolt korlátos síkidom Jordan-mértéke

$$\mathcal{J} = \int_a^b \int_0^{f(x)} 1 \, dy \, dx = \int_a^b [y]_0^{f(x)} \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Megjegyzés

$\mathcal{J}(T) = 0$ azt jelenti, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists Q_1, Q_2 \dots Q_p$ tégláknak olyan véges rendszere, melyre $\sum_{k=1}^p \mathcal{J}(Q_k) < \varepsilon$, és $T \subset \bigcup_{k=1}^p Q_k$.

Ezeket a halmazokat **Jordan-szerint nullmértékű**nek nevezzük.

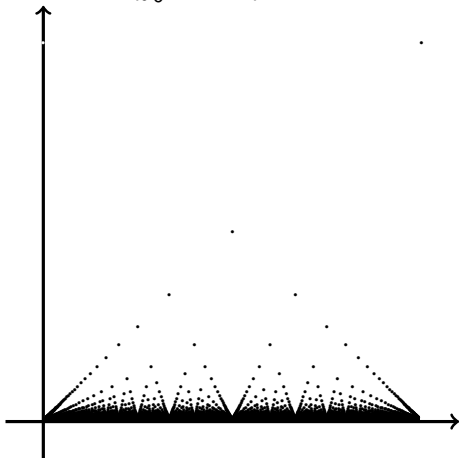
Tétel (Jordan-Riemann-kritérium)

- ▶ $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz pontosan akkor Jordan-mérhető, ha határa Jordan-szerint nullmértékű.
- ▶ Ha $S \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, és szakadási pontjainak halmaza Jordan-szerint nullmértékű, akkor f Riemann-integrálható S -n.

Példa

A Thomae-függvény $T(x) = \begin{cases} \max\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^+, nx \in \mathbb{Z}\}, & \text{ha } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ha } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ szakadási

helyeinek halmaza $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ nem Jordan-mérhető, de T Riemann-integrálható a $[0, 1]$ halmazon ($\int_0^1 T = 0$).



Ehhez hasonlót jelent a Lebesgue-mérték szerinti nullmértékűség is.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $T \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **Lebesgue-szerint nullmértékű**, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists Q_1, Q_2 \dots$ tégláknak olyan (végtelen) sorozata, melyre $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{J}(Q_k) < \varepsilon$, és $T \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$.

Tétel (Lebesgue-kritérium)

Egy $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz pontosan akkor Jordan-mérhető, ha határa Lebesgue-szerint nullmértékű.

Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető halmaz, $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, akkor f pontosan akkor Riemann-integrálható T -n, ha T -beli szakadási pontjainak halmaza Lebesgue-szerint nullmértékű.

Tétel (A Riemann-integrál monoton)

Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és $f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható T -n úgy, hogy $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in T$ esetén, akkor

$$\int_T f \leq \int_T g.$$

Következmény (A Jordan-mérték monoton)

Ha $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhetőek úgy, hogy $T_1 \subset T_2$, akkor

$$\mathcal{J}(T_1) \leq \mathcal{J}(T_2).$$

Tétel (A Riemann-integrál lineáris funkcionál)

Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és $f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható T -n, akkor $f + g$ is Riemann-integrálható T -n, és

$$\int_T (f + g) = \int_T f + \int_T g.$$

Ha még $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor αf is Riemann-integrálható T -n, és

$$\int_T (\alpha f) = \alpha \int_T f.$$

Tétel

Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható T -n, akkor $|f|$ is integrálható T -n, és

$$\left| \int_T f \right| \leq \int_T |f|.$$

Lemma

Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és $f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható T -n, akkor $m(\mathbf{x}) = \min\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\}$ és $M(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\}$ is integrálható T -n.

Tétel

Ha $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^n$ korlátos úgy, hogy f Riemann-integrálható T_1 -en és T_2 -n, akkor $T_1 \cup T_2$ -n és $T_1 \cap T_2$ -n is az, és

$$\int_{T_1 \cup T_2} f + \int_{T_1 \cap T_2} f = \int_{T_1} f + \int_{T_2} f.$$

Tétel (A Riemann-integrál a tartomány szerint additív)

Legyen $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^n$ korlátos úgy, hogy $\text{int}(T_1) \cap \text{int}(T_2) = \emptyset$! Ha f Riemann-integrálható T_1 -en és T_2 -n, akkor $T_1 \cup T_2$ -n is az, és

$$\int_{T_1 \cup T_2} f = \int_{T_1} f + \int_{T_2} f.$$

Következmény (A Jordan-mérték additív)

Legyen $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető úgy, hogy $\text{int}(T_1) \cap \text{int}(T_2) = \emptyset$! Ekkor $T_1 \cup T_2$ is Jordan-mérhető, és

$$\mathcal{J}(T_1 \cup T_2) = \mathcal{J}(T_1) + \mathcal{J}(T_2).$$

Az egyváltozós függvényeknél tanult helyettesítéses integrált szeretnénk általánosítani. Emlékeztetőül.

Tétel (Helyettesítéses integrál)

Legyen $a < b$, $g \in C^1_{[a,b]}$, és $f \in C^0_{g([a,b])}$. Ekkor

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t))g'(t) dt.$$

Az első fontos változás, hogy a többváltozós esetre kiterjeszthető alaknál nincs irányítva az integrálási tartomány.

Ha g szigorúan monoton növekvő, akkor ez semmilyen változást nem jelent, mert ekkor $g(a) < g(b)$, azaz ekkor $g([a,b]) = [g(a), g(b)]$. Ha viszont szigorúan monoton csökkenő, akkor $g(a) > g(b)$, azaz ekkor $g([a,b]) = [g(b), g(a)]$. Viszont ekkor $g'(t) \leq 0$, ezért általánosan a formula

$$\int_{g([a,b])} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) |g'(t)| dt$$

alakba írható szigorúan monoton, azaz kölcsönösen egyértelmű g esetén.

Az egyváltozós függvényeknél tanult helyettesítéssel integrált szeretnénk általánosítani. Emlékeztetőül.

Tétel (Helyettesítéssel integrál)

Legyen $a < b$, $g \in C^1_{[a,b]}$, és $f \in C^0_{g([a,b])}$. Ekkor

$$\int_{g([a,b])} f(x) dx = \int_{[a,b]} f(g(t)) |g'(t)| dt$$

alakba írható szigorúan monoton, azaz kölcsönösen egyértelmű g esetén. n -változós esetben $[a, b]$ helyett írhatunk $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazt (ilyen például egy normáltartomány), és ekkor $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ kölcsönösen egyértelmű, folytonosan deriválható transzformáció.

Ekkor g deriváltja a Jacobi-mátrix, a képletbe pedig a Jacobi-determináns abszolút értékét írjuk.

Tétel (Integráltranszformáció)

Legyen $E \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\mathbf{g} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható! Ha $A \subset E$ kompakt és Jordan-mérhető, $\mathbf{g}|_{\text{int } A}$ injektív és $f : \mathbf{g}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor a következő integrálok léteznek és egyenlőek.

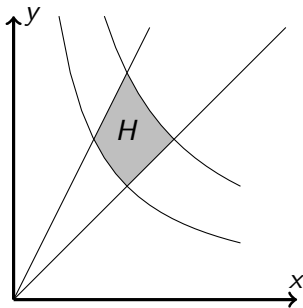
$$\int_{\mathbf{g}(A)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) |\det \mathbf{g}'(\mathbf{t})| d\mathbf{t}.$$

Megjegyzés

A Tételben elég f Riemann-integrálhatósága $\mathbf{g}(A)$ -n a folytonosság helyett. Vagy a másik oldali integrál létezése.

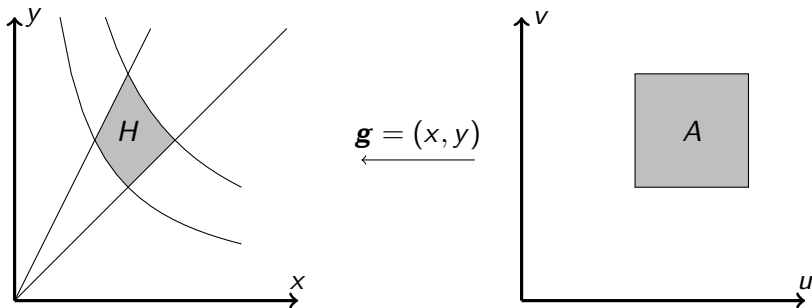
Feladat

Határozzuk meg az $xy = 1$ és $xy = 2$ hiperbolák, és az $y = x$ és $y = 2x$ egyenesek által határolt H korlátos tartomány területét.



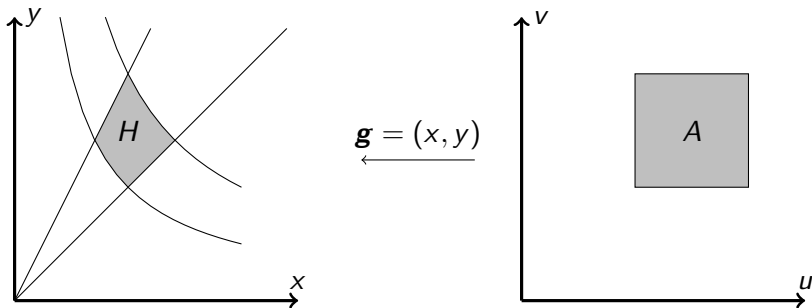
Feladat

Határozzuk meg az $xy = 1$ és $xy = 2$ hiperbolák, és az $y = x$ és $y = 2x$ egyenesek által határolt H korlátos tartomány területét.



Feladat

Határozzuk meg az $xy = 1$ és $xy = 2$ hiperbolák, és az $y = x$ és $y = 2x$ egyenesek által határolt H korlátos tartomány területét.



$$T = \int_H 1 \, d(x, y) = \int_{g(A)} 1 \, d(x, y) = \int_A \frac{1}{2v} \, d(u, v) = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{2v} \, du \, dv = \frac{\ln 2}{2}$$

Következmény (A Jordan-mérték eltolás-invariáns.)

Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, akkor $T + \mathbf{c}$ is Jordan-mérhető, és

$$\mathcal{J}(T + \mathbf{c}) = \mathcal{J}(T).$$

Tétel

Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda T = \{\lambda \mathbf{x} | \mathbf{x} \in T\}$ is Jordan-mérhető és $\mathcal{J}(\lambda T) = |\lambda|^n \mathcal{J}(T)$.

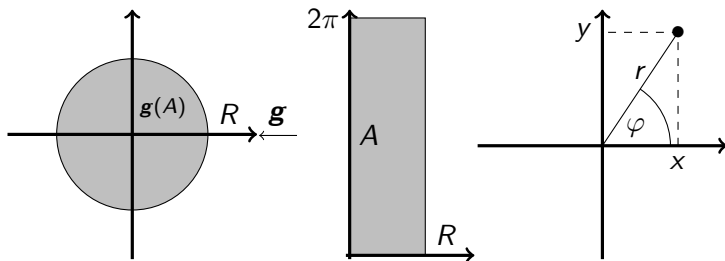
Polártranszformáció

Tegyük fel, hogy a $T \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon szeretnénk integrálni. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $x^2 + y^2 \leq R^2$, ha $(x, y) \in T$, és legyenek az új változók r és φ úgy, hogy $x = r \cos \varphi$ és $y = r \sin \varphi$, ahol $r \in [0, R]$ és $\varphi \in [0, 2\pi]$, azaz $A = [0, R] \times [0, 2\pi]$ és

$$\mathbf{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Ekkor a Jacobi-determináns

$$\det \mathbf{g}'(r, \varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

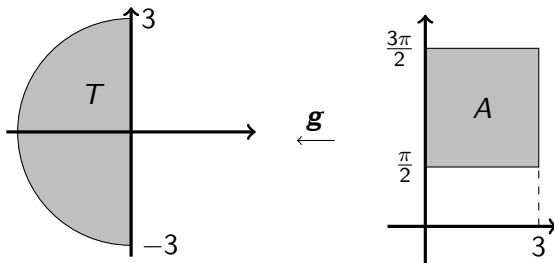


Feladat

Legyen $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, x^2 + y^2 \leq 9\}$!

$$\int_T \cos(x^2 + y^2) dT = ?$$

Most az integrandus problémás, ezért alkalmazzunk polártranszformációt.

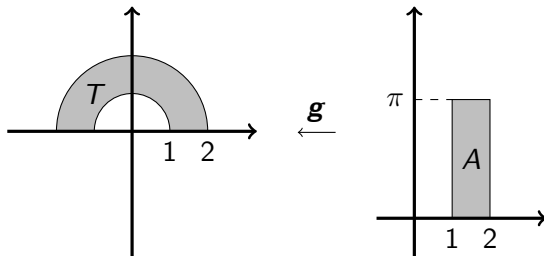


Feladat

Legyen $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$!

$$\int_T \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dT = ?$$

Most az integrandus problémás, ezért alkalmazzunk polártranszformációt.

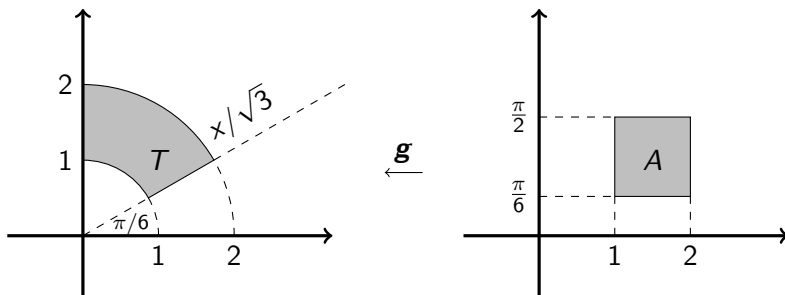


Feladat

Legyen $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$!

$$\int_T 4xy^3 \, dT = ?$$

Alkalmazzunk polártranszformációt.

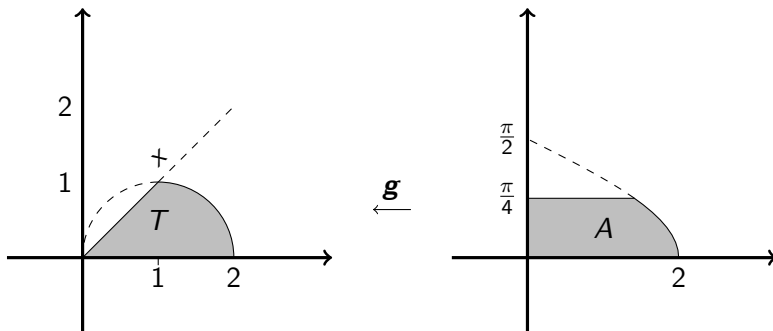


Feladat

Legyen $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$!

$$\int_T 2 + y \, dT = ?$$

Alkalmazzunk polártranszformációt.



Henger koordináták

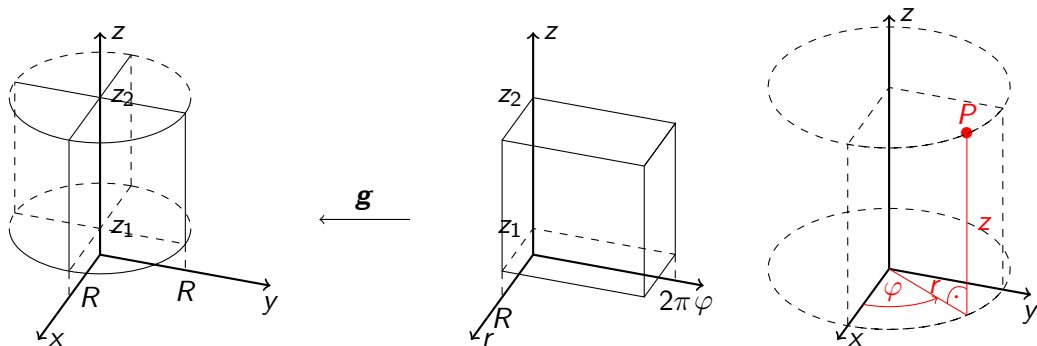
Tegyük fel, hogy a $T \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmazon szeretnénk integrálni. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x^2 + y^2 \leq R^2$ és $z_1 \leq z \leq z_2$, ha $(x, y, z) \in T$, és legyenek az új változók r , φ és z úgy, hogy $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ és $z = z$, ahol $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ és $z \in [z_1, z_2]$, azaz $A = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [z_1, z_2]$ és

$$\mathbf{g}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi, z) \\ y(r, \varphi, z) \\ z(r, \varphi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Ekkor a Jacobi-determináns

$$\det \mathbf{g}'(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi) + 0 + 0 = r.$$

Tulajdonképpen a Fubini-tétel alkalmazásával, az integrált egy z szerinti, és egy (x, y) szerinti integrálból rakjuk össze, majd utóbbit polárkoordinátázzuk.



Feladat

Legyen $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$!

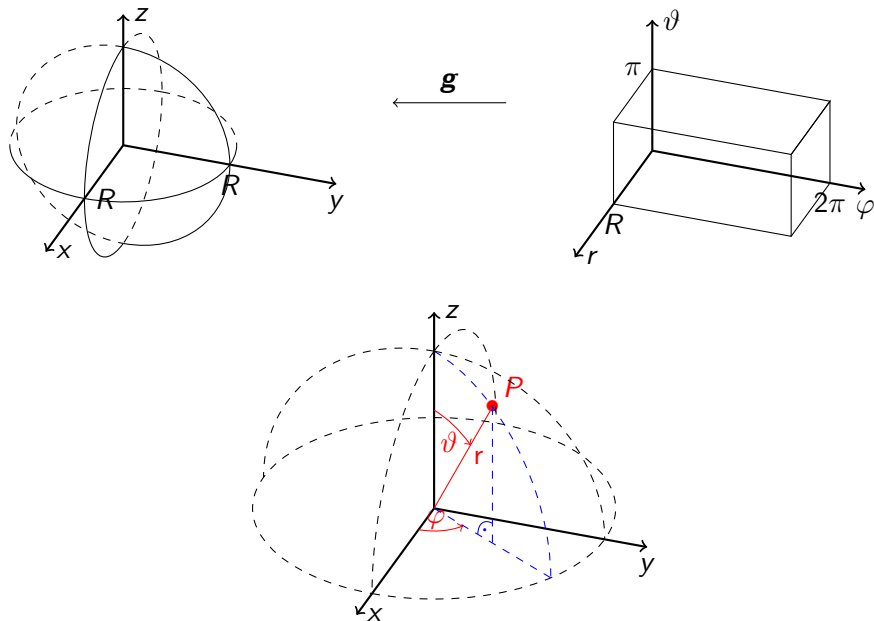
$$\iiint_V x^2 \, dV = ?$$

Feladat

Legyen $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, 1 \leq z \leq e\}$!

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dV = ?$$

Gömbi koordináták



Tegyük fel, hogy a $T \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmazon szeretnénk integrálni. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, ha $(x, y, z) \in T$, és legyenek az új változók r , φ és ϑ úgy, hogy $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$ és $z = r \cos \vartheta$, ahol $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ és $\vartheta \in [0, \pi]$, azaz $A = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ és

$$\mathbf{g}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

A változók sorrendjét azért cseréltük fel, hogy a Jacobi-determináns pozitív legyen. Ez csak esztétikai kérdés, hiszen nekünk ugyanis a Jacobi-determináns abszolút értéke kell. A Jacobi-determináns

$$\begin{aligned} \det \mathbf{g}'(r, \vartheta, \varphi) &= \begin{vmatrix} x'_r & x'_\vartheta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\vartheta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\vartheta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \cos \vartheta (r^2 \cos^2 \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta + r^2 \sin^2 \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta) - \\ &\quad - (-r \sin \vartheta) (r \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta) + 0 = \\ &= r^2 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta + r^2 \sin \vartheta \sin^2 \vartheta = r^2 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Feladat

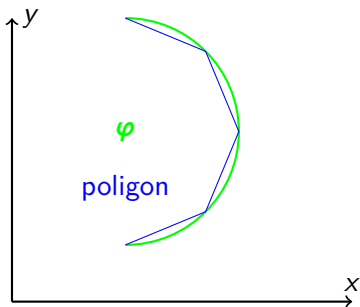
Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát!

Definíció

Ha $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $\alpha < \beta$, akkor a $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ folytonos függvényt, illetve az értékkészletét **görbének** hívjuk. Ha $F = \{\alpha = t_0 < \dots < t_k = \beta\}$ az $[\alpha, \beta]$ intervallum egy felosztása, akkor

azt mondjuk, hogy $\sum_{i=1}^k |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$ a hozzá tartozó **poligon hossza**. Ha a poligonok hosszainak halmaza felülről korlátos, akkor a görbét **rektifikálhatónak** nevezzük. A **görbe hossza** jelentse a szupréumot.

Azt mondjuk, hogy a fenti görbe **szakaszonként sima** ha folytonos, és létezik olyan felosztás, hogy a kompakt részintervallumokon folytonosan deriválható.



Tétel

Ha $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt és összefüggő, akkor bármely két pontja összeköthető poligonnal.

Definíció

Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ rektifikálható görbe.

A $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ reprezentánsponthoz tartozó

integrálközelítő összeg jelentse a

$$\sigma = \sum_{i=1}^k |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| f(\varphi(\xi_i)) \text{ számot.}$$

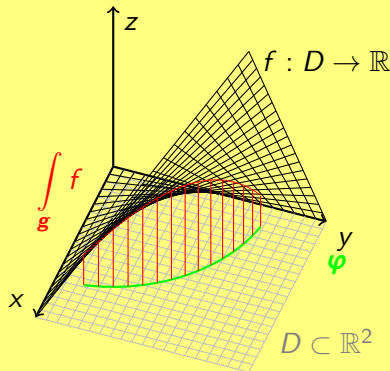
Ha

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \Delta F < \delta \implies |\sigma - I| < \varepsilon,$$

akkor azt mondjuk, hogy az f skalármező

integrálható a φ rektifikálható görbe mentén, és az I értéket f skalármező φ görbe menti integráljának

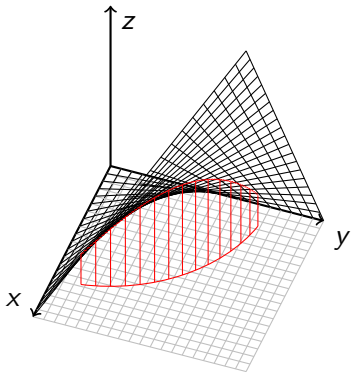
nevezzük. Ezt így jelöljük: $I = \int_{\varphi} f$



Tétel

A definíció jelöléseivel, ha φ szakaszonként sima, akkor rektifikálható. Ha még f folytonos, akkor integrálható a φ görbe mentén, és a vonalintegrál

$$\int_{\varphi} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$



Feladat

Számoljuk ki az $f(x, y) = xy$ függvény $\varphi(t) = (1 - t, t)$, $(t \in [0, 1])$ görbe menti integrálját!

Feladat

Számoljuk ki az $f(x, y) = xy$ függvény $\varphi(t) = (1 - \sin t, \sin t)$, $(t \in [0, \frac{\pi}{2}])$ görbe menti integrálját!

Feladat

Számoljuk ki az $f(x, y) = xy$ függvény $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $(t \in [0, \frac{\pi}{2}])$ görbe menti integrálját!

Megjegyzés

Az $f = 1$ függvény görbe menti integrálja a görbe ívhossza.

Tétel

Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta < \gamma$, f_1 és f_2 két skalármezője a $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmaznak, melyek integrálhatóak a $\varphi_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ és $\varphi_2 : [\beta, \gamma] \rightarrow D$ rektifikálható görbék mentén, akkor

- ▶ az $f_3 = f_1 + f_2$ skalármező is integrálható a φ_1 görbe mentén és $\int_{\varphi_1} f_3 = \int_{\varphi_1} f_1 + \int_{\varphi_1} f_2$;
- ▶ az $f_4 = \lambda f_1$ skalármező is integrálható a φ_1 görbe mentén és $\int_{\varphi_1} f_4 = \lambda \int_{\varphi_1} f_1$;
- ▶ ha $\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta)$, akkor $\varphi_3 = \varphi_1 \cup \varphi_2$ is rektifikálható, és f_1 integrálható a φ_3 görbe mentén, méghozzá $\int_{\varphi_3} f_1 = \int_{\varphi_1} f_1 + \int_{\varphi_2} f_1$;
- ▶ ha $\varphi_4 : [-\beta, -\alpha] \rightarrow D$, $\varphi_4(t) = \varphi_1(-t)$, akkor φ_4 is rektifikálható, és f_1 integrálható a φ_4 mentén is, és $\int_{\varphi_4} f_1 = - \int_{\varphi_1} f_1$.

Definíció

Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ rektifikálható görbe. Továbbá $F = \{\alpha = t_0 < \dots < t_k = \beta\}$ az $[\alpha, \beta]$ intervallum egy felosztása. A $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ reprezentánsponthoz tartozó **integrálközelítő összeg** jelentse a

$$\sigma = \sum_{i=1}^k \langle \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}), \mathbf{v}(\varphi(\xi_i)) \rangle \text{ számot.}$$

Ha

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \Delta F < \delta \implies |\sigma - I| < \varepsilon,$$

akkor azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektormező **integrálható** a φ rektifikálható **görbe mentén**, és az I értéket $\mathbf{v}$ vektormező **φ görbe menti integráljának** nevezzük. Ezt így jelöljük: $I = \int_{\varphi} \mathbf{v}$

Definíció

Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ rektifikálható görbe. Ha $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, akkor azt mondjuk, hogy φ **zárt görbe**, míg az $\int_{\varphi} \mathbf{v}$ vonalintegrált,

körintegrálnak nevezzük, és használjuk a $\oint_{\varphi} \mathbf{v}$ jelölést.

Tétel

Ha $D \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő és nyílt, $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező a szakaszonként sima D -beli görbék mentén integrálható, akkor a következő állítások ekvivalensek.

- 1. a szakaszonként sima görbe menti integrál független az úttól (csak a végpontoktól függ);*
- 2. a szakaszonként sima zárt görbe menti körintegrál 0;*

Tétel

A definíció jelöléseivel, ha $\mathbf{v}$ és φ folytonos, akkor a $\int_{\varphi} \mathbf{v}$ vonalintegrál létezik.

Ha még φ szakaszonként sima, akkor

$$\int_{\varphi} \mathbf{v} = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{v}(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt.$$

Feladat

Számoljuk ki az $\mathbf{v}(x, y, z) = (y, z, x)$ függvény $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $(t \in [0, 4\pi])$ görbe menti integrálját!

Feladat

Számoljuk ki az $\mathbf{v}(x, y, z) = (y, z, x)$ függvény $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos t^2, \sin t^2, t^2)$, $(t \in [0, 2\sqrt{\pi}])$ görbe menti integrálját!

Feladat

Számoljuk ki az $\mathbf{v}(x, y, z) = (y, z, x)$ függvény $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, 0, t)$, $(t \in [0, 4\pi])$ görbe menti integrálját!

Tétel

Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta < \gamma$, $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ két vektormezője a $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmaznak, melyek integrálhatóak a $\varphi_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ és $\varphi_2 : [\beta, \gamma] \rightarrow D$ rektifikálható görbék mentén, akkor

- ▶ az $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ vektormező is integrálható a φ_1 görbe mentén és $\int_{\varphi_1} \mathbf{v}_3 = \int_{\varphi_1} \mathbf{v}_1 + \int_{\varphi_1} \mathbf{v}_2$;
- ▶ az $\mathbf{v}_4 = \lambda \mathbf{v}_1$ vektormező is integrálható a φ_1 görbe mentén és $\int_{\varphi_1} \mathbf{v}_4 = \lambda \int_{\varphi_1} \mathbf{v}_1$;
- ▶ ha $\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta)$, akkor $\varphi_3 = \varphi_1 \cup \varphi_2$ is rektifikálható, és $\mathbf{v}_1$ integrálható a φ_3 görbe mentén, méghozzá $\int_{\varphi_3} \mathbf{v}_1 = \int_{\varphi_1} \mathbf{v}_1 + \int_{\varphi_2} \mathbf{v}_1$;
- ▶ ha $\varphi_4 : [-\beta, -\alpha] \rightarrow D$, $\varphi_4(t) = \varphi_1(-t)$, akkor φ_4 is rektifikálható, és $\mathbf{v}_1$ integrálható a φ_4 mentén is, és $\int_{\varphi_4} \mathbf{v}_1 = - \int_{\varphi_1} \mathbf{v}_1$.

Definíció

Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező **primitív függvénye** vagy **potenciálfüggvénye** a $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormezőnek, ha

$$\operatorname{grad} f = \mathbf{v}.$$

Ha a $\mathbf{v}$ vektormezőnek van primitív függvénye, akkor **konzervatív**nak vagy **potenciális**nak nevezzük.

Tétel

Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt és összefüggő, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező primitív függvénye a $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormezőnek. Ekkor a $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező pontosan akkor primitív függvénye $\mathbf{v}$ -nek, ha $f - g$ konstans.

Megjegyzés

Ha $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ konzervatív vektormező deriválható, akkor örvénymentes.

Feladat

Potenciálosak-e a

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left(yz - xy, xz - \frac{x^2}{2} + yz^2, xy + y^2z \right)$$

és a

$$\mathbf{w}(x, y, z) = (y + \sin(y) \cdot e^z, x \cdot \cos(y) \cdot e^z, x \cdot \sin(y) \cdot e^z)$$

vektormezők? Ha igen adja meg a primitív függvényeket!

Tétel (Newton-Leibniz-formula (vonaleintegrál))

Ha $D \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő és nyílt, $\alpha < \beta$, a $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonos vektormező primitív függvénye az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, akkor minden D -beli szakaszonként sima $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ görbe mentén integrálható, és

$$\int_{\varphi} \mathbf{v} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}).$$

Következmény

Ha $D \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő és nyílt, $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ konzervatív vektormező, akkor

- ▶ *a szakaszonként sima görbe menti integrál független az úttól (csak a végpontoktól függ);*
- ▶ *a szakaszonként sima zárt görbe menti körintegrál 0;*

Definíció

Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő és nyílt, és $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező olyan, hogy minden D -beli φ szakaszonként sima zárt görbére vett körintegrálja 0. Legyen továbbá $\mathbf{a} \in D$ rögzített.

Ha $\mathbf{x} \in D$ esetén $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ egy olyan szakaszonként sima görbe, melyre $\varphi(\alpha) = \mathbf{a}$ és $\varphi(\beta) = \mathbf{x}$, akkor az $f(\mathbf{x}) = \int_{\varphi} \mathbf{v}$ függvényt a $\mathbf{v}$ **integrálfüggvény**ének nevezzük és bevezetjük az

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \text{ jelölést.}$$

Tétel

A definíció jelöléseivel, ha a $\mathbf{v}$ vektormező folytonos, akkor az integrálfüggvény egyben primitív függvény is.

Definíció

A $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmazt csillagtartománynak nevezzük, ha létezik $\mathbf{a} \in D$ úgy, hogy minden $\mathbf{x} \in D$ esetén az $\mathbf{a}$ -t és az $\mathbf{x}$ -et összekötő szakasz D -ben halad.

Következmény

A D csillagtartományon értelmezett folytonosan deriválható vektormező örvénymentes, akkor létezik primitív függvénye.

Példa

Vizsgáljuk a $\mathbf{v}(x, y) = \frac{(y, -x)}{x^2 + y^2}$ képlettel definiált vektormezőt!

Lemma

Ha $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ rektifikálható, pozitív irányítású zárt görbe, mely nem metszi saját magát, T a φ által határolt tartomány, és $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonosan deriválható, akkor

$$(1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} v_1(\varphi(t)) \varphi_1'(t) dt = - \iint_T D_2 v_1 dT,$$

$$(2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} v_2(\varphi(t)) \varphi_2'(t) dt = \iint_T D_1 v_2 dT.$$

Tétel (Green-tétel)

Ha $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ rektifikálható, pozitív irányítású zárt görbe, mely nem metszi saját magát, T a φ által határolt tartomány, és $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonosan deriválható, akkor

$$\oint_{\varphi} \mathbf{v} = \iint_T D_1 v_2 - D_2 v_1 dT.$$

Megjegyzés (Newton-Leibniz-formula 2D)

A $\mathbf{v}$ vektormező **ívhossz szerinti integráljának** nevezzük a koordinátánkénti görbementi

integrált, azaz
$$\int_{\varphi} \mathbf{v} \, ds = \left(\int_{\varphi} v_1, \int_{\varphi} v_2 \right).$$

A Green-tételben szereplő φ görbéről tegyük fel, hogy $\varphi'(t) \neq \mathbf{0}$, és jelölje

$$\mathbf{n}(\varphi(t)) = \frac{(\varphi_2'(t), -\varphi_1'(t))}{|\varphi'(t)|}$$

a kifelé mutató normál egységvektorát.

Ezekkel a jelölésekkel, ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható, akkor az $(f\mathbf{n})$ vektormező ívhossz szerinti integrálja

$$\int_{\varphi} f \mathbf{n} \, ds = \left(\int_{\varphi} f n_1, \int_{\varphi} f n_2 \right) = \left(\iint_T D_1 f \, dT, \iint_T D_2 f \, dT \right) = \iint_T \operatorname{grad} f \, dT.$$

Definíció

Ha $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető, akkor a $\mathbf{r} : A \rightarrow D$ folytonos függvényt, illetve az értékkészletét **felületnek** hívjuk.

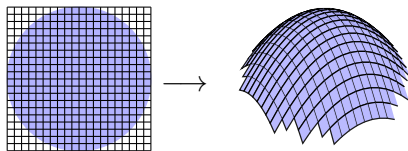
Ha $\mathbf{r}$ folytonosan deriválható és az adott integrál létezik, akkor definiáljuk a következőket.

► felület **felszíne**: $\int_A |D_1 \mathbf{r} \times D_2 \mathbf{r}| \, dA;$

► $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező **felületi integrálja**: $\int_r f = \int_A (f \circ \mathbf{r}) \cdot |D_1 \mathbf{r} \times D_2 \mathbf{r}| \, dA;$

► $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező **felületi integrálja**: $\int_r \mathbf{v} = \int_A \langle \mathbf{v} \circ \mathbf{r}, D_1 \mathbf{r} \times D_2 \mathbf{r} \rangle \, dA;$

► $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező **felszín szerinti integrálja**: $\int_r \mathbf{v} \, ds = \left(\int_r v_1, \int_r v_2, \int_r v_3 \right).$



Tétel (Stokes-tétel)

Ha $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető, az $\mathbf{r} : A \rightarrow D$ folytonosan deriválható felület határa $\boldsymbol{\varphi} : [0, 1] \rightarrow D$ zárt görbe, mely nem metszi saját magát, és a felület normálvektorával szemből nézve pozitív irányítású, akkor a $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonosan deriválható vektormezőre

$$\oint_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{v} = \int_{\mathbf{r}} \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Tétel (Newton-Leibniz-formula 3D)

Ha $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető, az $\mathbf{r} : A \rightarrow D$ folytonosan deriválható felület a $K \subset D$ kompakt halmaz határa, és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ szintén folytonos deriválható, akkor

$$\int_{\mathbf{r}} (f \mathbf{n}) \, ds = \int_K \operatorname{grad} f \, dK,$$

ahol $\mathbf{n}(\mathbf{r}(x, y))$ az $\mathbf{r}$ felület adott pontjában a kifelé mutató normál egységvektor.

Megjegyzés

Az $\mathbf{r}$ felület folytonos deriválhatósága helyett elég feltennünk a 'szakaszonként' folytonosan deriválhatóságot, vagyis a következőt.

Legyen $\mathbf{r}$ folytonos, és véges sok folytonosan deriválható felület egyesítése, azaz az A -t felosztjuk véges sok Jordan-mérhető részre, melyeken f folytonosan deriválható.

Tétel (Gauss-Osztrogradszkij-tétel)

Ha $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető, az $\mathbf{r} : A \rightarrow D$ folytonosan deriválható felület a $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt halmaz határa, és $\mathbf{v} : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ szintén folytonos deriválható, akkor

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{v} = \int_{\mathbf{r}} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = \int_K \operatorname{div} \mathbf{v} \, dK,$$

ahol $\mathbf{n}(\mathbf{r}(x, y))$ az $\mathbf{r}$ felület adott pontjában a kifelé mutató normál egységvektor.

Megjegyzés

Az $\mathbf{r}$ felület folytonos deriválhatósága helyett elég feltennünk a 'szakaszonként' folytonosan deriválhatóságot, vagyis a következőt.

Legyen $\mathbf{r}$ folytonos, és véges sok folytonosan deriválható felület egyesítése, azaz az A -t felosztjuk véges sok Jordan-mérhető részre, melyeken f folytonosan deriválható.

VÉGE

Köszönöm a figyelmet!

Pataki Gergely