Riemann-sejtés

avagy a matematika „Szent Grálja”

Dian Eszter (D6Z998)

Thiering Gergő (IUVPNO)

Zábori Balázs (COR8BN)

Történet

- 1859 Bernard Riemann – a sejtés megfogalmazása
  - a matematika „Szent Grálja”
- 1900 International Congress of Mathematicians
  - David Hilbert: a 23 megoldandó probléma egyike
- Clay Mathematics Institue
  - „Millenium Prize Problem”

Bernard Riemann
(1826-1866)

David Hilbert
(1862-1943)

Miről is szól a Riemann-sejtés?

- Riemann-féle zeta-függvény:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad Re(s) > 1$$

- A Riemann-sejtés a zeta-függvény zérushelyeiről szól
- Az első 10^9 zérushelyre számolással igazolt

Egy mondat a Riemann-sejtésről

„If I were to awaken after having slept for a thousand years, my first question would be: Has the Riemann hypotesis been proven?"

David Hilbert

A Riemann–féle zeta–függvény

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad\qquad Re(s) > 1$$

- Egyváltozós függvény
- ÉT=Re(s)>1
- Konvergens sor

A Riemann–sejtés

A Riemann–féle zeta–függvény minden nem triviális gyökének valós része 1/2.
Tehát a nem triviális gyökök az

$$\frac{1}{2} + it$$ kritikus egyenesen vannak

$t \in \mathbb{R}$

i: *képzetes egység*

A Liouville-függvény

Liouville-függvény:

$$\lambda(n) = (-1)^{\omega(n)}$$

$\omega(n)$ n multiplicitással vett prímfaktorai

Tehát:

$$\lambda(2) = \lambda(3) = \lambda(5) = \lambda(7) = \lambda(8) = -1$$
$$\lambda(1) = \lambda(4) = \lambda(6) = \lambda(9) = \lambda(10) = +1$$

$$\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$$

Riemann–sejtés ekvivalens alakja

1899 Landau:

A Riemann–sejtés ekvivalens megfogalmazása:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(1) + \lambda(2) + \cdots + \lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0$$

Minden rögzített $\varepsilon > 0$ esetén.

CHT és Riemann-sejtés

Centrális határeloszlás tétele:

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ független, azonos eloszlású valváltozók, $\mathbb{P}(\mu_i = 1) = \mathbb{P}(\mu_i = -1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n}{n^{\frac{1}{2}}} = \mathcal{N}(0,1)$$

$\mathcal{N}(0,1)$ standard normál-eloszlás

CHT és Riemann-sejtés

CHT: $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n}{n^{\frac{1}{2}}} = \mathcal{N}(0,1)$$

Ha a nevező nagyobb: 0-hoz tart.

→

Riemann: $$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1) + \lambda(2) + \cdots + \lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0$$

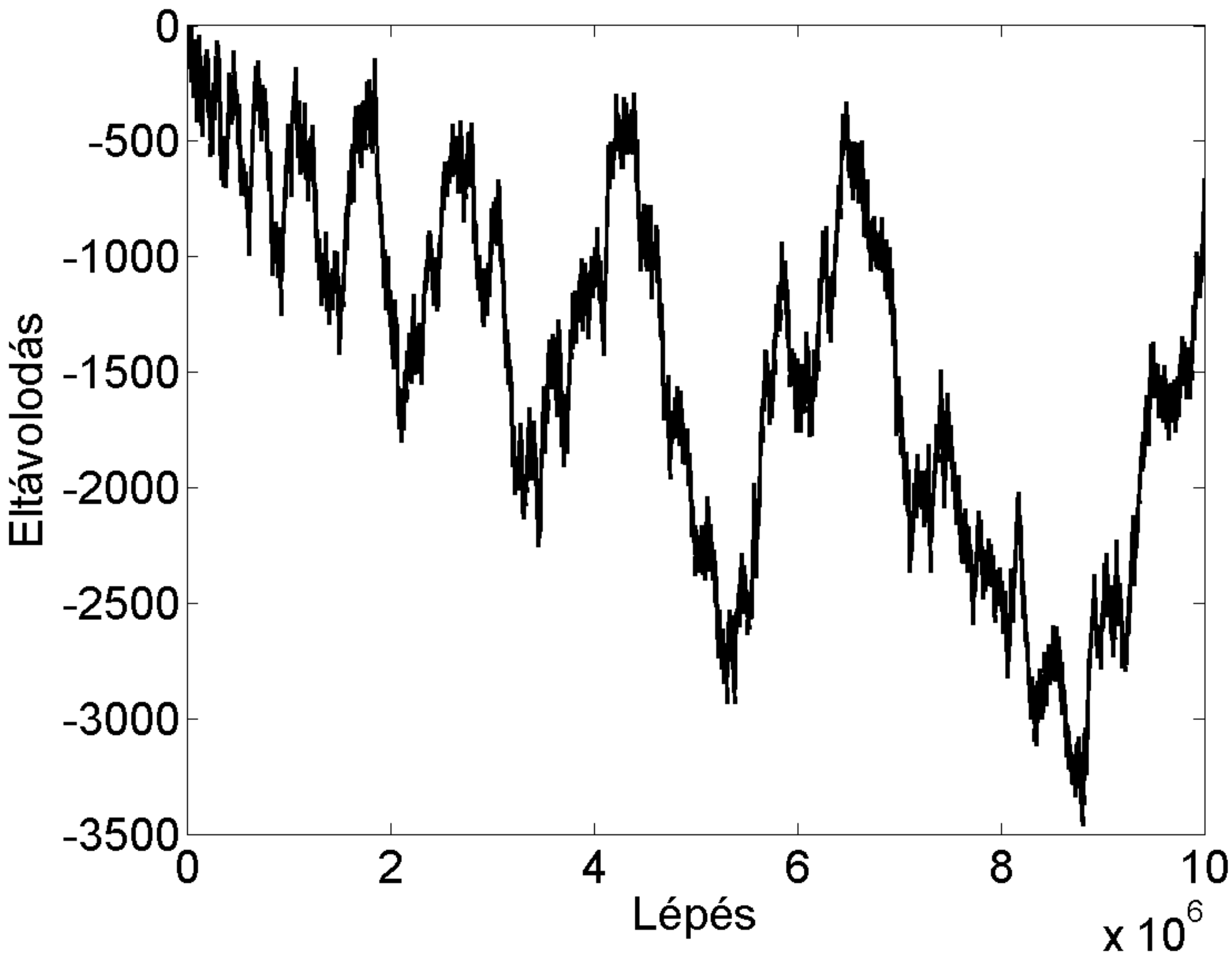
„random walk” – bolyongás

CHT: független, a.e. valváltozók
És Riemann?

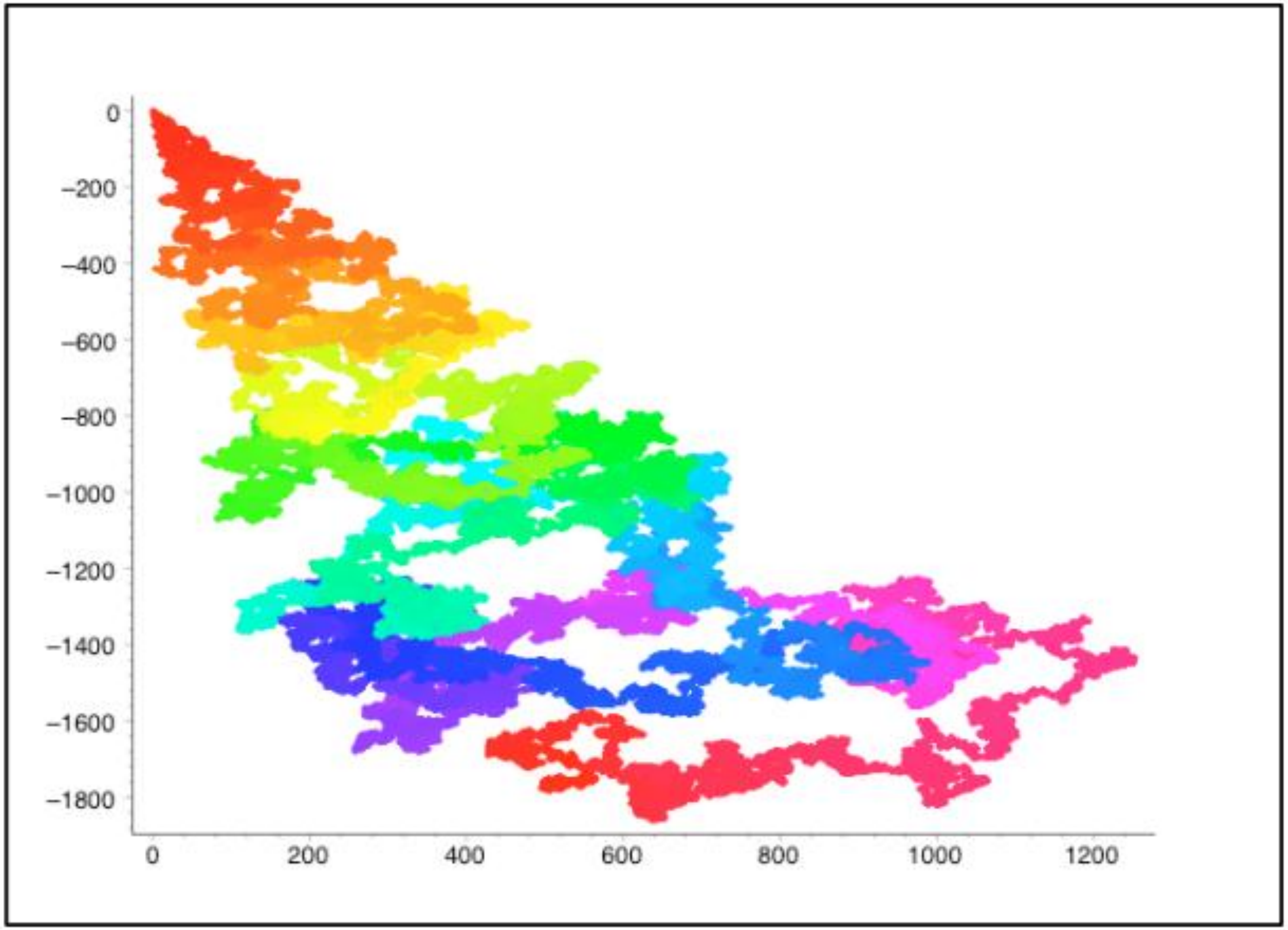
$$\{\lambda(i)\}_{i=1}^{\infty} = \{(1,-1),(-1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,1),\dots\}$$

Bolyongás.

„random walk” – bolyongás



„random walk” – bolyongás



A Prímszám-tétel

Prímszámok eloszlását írja le:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n/ln(n)} = 1$$

$$n \in \mathbb{N}$$

Vagyis:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{ln(n)}$$

Ahol $\pi(n)$ az n-ig előforduló prímek száma, azaz a prímszámláló-függvény.

A Prímszám–tétel ekvivalens alakja

A prímszám–tétel Landau–féle megfogalmazása:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1) + \lambda + \cdots + \lambda(n)}{n} = 0$$

A Riemann–sejtés ekvivalens alakja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1) + \lambda + \cdots + \lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0$$

Útban a Riemann–függvény felé

A Dirichlet–sorozat:

$$s = \sigma + i \cdot t \qquad \sigma, t, \epsilon \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

$Re(s) > 1$ esetén analitikus fv–t generál:

→zeta–függvény

Útban a Riemann–függvény felé

Dirichlet–sorozat s=1 esete:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

harmonikus sorozat → divergens

Útban a Riemann–függvény felé

Euler és a zeta–függvény:

Precíz számolás $s = 2, 3, \dots, 15, 16$ esetekre

Pl.:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Útban a Riemann–függvény felé

Az Euler–szorzat formula
→ explicit kapcsolat a prímszámok és a zeta–függvény között

$$n = \prod_{p_i} {p_i}^{e_i}$$

$n \in \mathbb{N}$

$e_i \in \mathbb{N}$

p_i *prímszám*

Útban a Riemann–függvény felé

Euler–produkt és Riemann–függvény:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}}_{\text{végtelen sorozat}} = \underbrace{\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)}_{\text{végtelen produktum (minden p rímre)}}$$

végtelen
sorozat

végtelen
produktum
(minden p rímre)

Útban a Riemann-függvény felé

Tétel:

A Dirichlet-sorozat analitikusan kiterjeszthető a $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ tartományra.

Útban a Riemann–függvény felé

A Riemann–féle levezetés kiindulópontja a Gamma–függvény:

$$\Gamma(s) = \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt}_{\text{Euler–integrál}}$$

$s \in \mathbb{C}$
$t \in \mathbb{R}$

Zérushelyek: $s = 0, -1, -2, \ldots$
Residuum helye: $s = -n$ értéke: $\frac{(-1)^n}{n!}$

Útban a Riemann–függvény felé

A felhasznált összefüggés:
Weierstraß–formula

$$\frac{1}{s\Gamma(s)} := e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}$$

$n \in \mathbb{N}$

$s \in \mathbb{C}$

$Re(s) > 1$

Útban a Riemann–függvény felé

A fenti összefüggések alapján levezethető:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left\{ \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\frac{\vartheta(x)-1}{2} \right) dx \right\}$$

ahol

$$\vartheta(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$$ Jacobi theta–függvény

Útban a Riemann–függvény felé

Az így kapott Riemann–függvény:

- meromorf
- s=1–nél pólusa van, a reziduum 1
- vizsgálhatóak a zérushelyek a komplex számsíkon

Vagyis a Riemann–függvény kiterjeszthető a teljes komplex számsíkra s=1 kivételével. s=1–ben a reziduum van, melynek értéke 1.

A Riemann–függvény zérushelyei

Triviális zérushelyek:

A Gamma–fv pólusai: s=0, –1, –2, –3, …

$$\zeta(s) \sim \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

Így a Riemann–fv triviális zérushelyek az

s=–2, –4, –6, … páros negatív egészek

Megj.: s=0 kiesik $\frac{1}{s(s-1)}$ miatt

A zeta-függvény tulajdonságai

Összefoglaló – ami tény:

- $Re(s) > 1$ esetén nincs zérushelye a függvénynek
- A függvény egyetlen pólusa az s=1, itt a reziduum 1
- A triviális zérushelyek a páros negatív egészek
- A nem triviális zérushelyek a $0 \leq Re(s) < 1$ tartományon találhatóak

És a sejtés:

- A nemtriviális zérushelyek a $Re(s) = \frac{1}{2}$ kritikus egyenesen fekszenek

A Riemann–sejtés

A Riemann–sejtés:

A zeta–függvény összes nem–triviális

zérushelye a $Re(s) = \frac{1}{2}$ kritikus egyenesen van.

Ami belátható…

Hardy–tétel:

A zeta–függvénynek végtelen sok zérushelye van a $Re(s) = \frac{1}{2}$ kritikus egyenesen.

Ha nem csak sejtés...

A Prímszám–tétel erősítése

Prímszám tétel:

$$\pi(x) = \frac{x}{ln(x)} + o\left(\frac{x}{lnx}\right)$$

Definíció: Li logaritmikus integrál:

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad \pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$$

Ha Riemann $\Rightarrow$

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(\sqrt{x}\log x\right)$$

Hol is tartunk most?

Az bizonyított hogy végtelen sok nem−triviális zérushely van a kritikus egyenesen.
A nehézség belátni, hogy minden nem−triviális zérushely ott van.

Számítógépes algoritmus:
A zérushelyek komplex értékek szerinti leszámlálása a $0 \leq Re(s) < 1$ tartományon
→ argumentumvizsgálat

Köszönjük a figyelmet!

Forrás:

Peter Borwein, Stephen Choi, Brendan Rooney, Andrea Weirathmueller, The Riemann Hypothesis: For the aficionado and virtuoso alike, 2006