

TARTALOMJEGYZÉK

I. BEVEZETÉS -----	2
II. ELŐZMÉNYEK -----	4
II. 1. A BENETTIN-STRELCYN BILIÁRD [3] -----	4
II. 2. A BENETTIN-STRELCYN BILIÁRD FELÜLVIZSGÁLATA [5] -----	7
II. 3. A TÖKBILIÁRD-----	9
III. A KÉTPARAMÉTERES BILIÁRDCSALÁD VIZSGÁLATA ---	11
III. 1. A GEOMETRIA -----	11
III. 2. A PROGRAM, ÉS A KIÉRTÉKELÉS MÓDSZEREI -----	13
IV. EREDMÉNYEIM -----	19
IV. 1. ÉRDEKES, ÚJ TARTOMÁNY -----	19
IV. 2. ERGODICITÁS VÉGES ESETBEN-----	20
IV. 3. EGYSZERŰ SZIGETSORS-----	25
IV. 4. LJAPUNOV-EXPONENS MÉRÉSE -----	29
IV. 5. TENGERSZÉTVÁLÁS-----	32
IV. 6. TOVÁBBI ÉRDEKES JELENSÉGEK-----	34
V. ÖSSZEFOGLALÁS -----	36
VI. KÖSZÖNET -----	38
VII. IRODALOMJEGYZÉK -----	39
MELLÉKLETEK:	
A, DVD-MELLÉKLET -----	41

I. Bevezetés

Klasszikus dinamikai rendszerek sztochasztikus tulajdonságainak kutatása több mint fél évszázados múltra tekint vissza. Ez idő alatt számos numerikus vizsgálatot végeztek, és több-kevesebb elméleti háttérrel is igyekeztek szolgáltatni azok alátámasztására. Szimulációs eredmények sora hívja fel a figyelmet egy újfajta jelenségre, az úgynevezett sztochasztikus átmenetre. Ez a jelenség olyan rendszerekben figyelhető meg, melyeket integrálható viselkedésű rendszerek perturbációjaként kaphatunk. Az átmenet az integrálható viselkedést folytonosan ergodikussá transzformálja.

Kevert dinamikával rendelkeznek a tipikus Hamiltoni rendszerek, fázisportréjuk jellemzően kaotikus tartomány(ok)ban elhelyezkedő rendezett szigetektől áll. Mivel a teljesen integrálható és a teljesen kaotikus dinamika vizsgálatához különböző analitikus eljárások használatosak, a határesetektől távol mindkét megközelítés érvényét veszti. A kevert fázissterű rendszerek szigorú matematikai tanulmányozása ezért nehézkes feladat. Ehhez hasonlóan a numerikus vizsgálat sem könnyű, hiszen pl. minél kisebb egy sziget, annál nehezebb szimulációk során észrevenni, továbbá a szimulációk véges mivolta is megnehezíti a helyes megfigyelést. Számos próbálkozás ismert az irodalomban [9,10] olyan rendszerek keresésére, amelyek megfelelő analitikus vizsgálatot tesznek lehetővé.

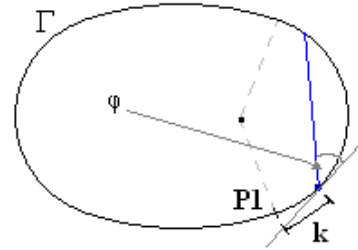
A biliárdok [1,2] olyan dinamikai rendszerek, melyek a biliárd játékhoz hasonlóan, egy tartományból, és az azt határoló görbéből, illetve a tartományon sűrűlőds nélkül mozgó tömegpont(ok)ból állnak. A játéktól eltérően a sarkokban nincsenek lyukak, és a matematikai biliárdok fala sem feltétlenül négyszögletes. Ezen felül a falak által határolt tartomány sem feltétlenül konvex és nem is feltétlenül sík. Általánosságban beszélve a tömegpont konstans sebességgel halad a tartomány geodetikusan mentén, míg el nem éri a falat. Ekkor úgy pattan vissza teljesen rugalmasan, hogy sebességvektorának tangenciális komponense megmarad, míg a normális komponens előjelet vált. Ez az optikából is jól ismert szabály, azaz a beesési és a visszaverődési szög megegyezik. A reflexiót tekinthetjük úgy is, hogy az adott pontbeli normálisra tükrözzük az egész biliárdot, és a pálya egyenesen halad tovább a tükrözött biliárdban. Ez alapján akár azt is mondhatjuk, hogy tulajdonképpen egy egyenes pálya van a biliárd falai közé speciálisan behajtogatva.

Talán így már könnyű belátni, miért kevésbé érdekesek a poligonális biliárdok, melyekben az ütközési pont kis bizonytalansága a fal mentén az ütközés után sem változik, a beérkező párhuzamos pályák ütközés után is párhuzamosak maradnak. Érhető módon érdekesebbek az ovális biliárdok, amelyekben az ütközés helyétől nagymértékben függ a beérkező pálya kis környezetének visszaverődés utáni sorsa. A párhuzamos pályák az ütközés után fókuszálódhatnak, illetve defókuszálódhatnak, de semmiképp sem maradnak párhuzamosak.

További vizsgálatokhoz érdemes bevezetni az itt használatos fázisster fogalmát. Mivel a tömegpont sűrűlőds nélkül halad a falak között, sebességvektorának hossza állandó marad. Ezzel a kikötéssel elég egy paraméter a sebesség megadásához. A tömegpont helyét 2 dimenzióban általánosan két koordinátával lehet megadni. De mivel az ütközések között egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, nem veszítünk információt azzal, ha csak az ütközések helyét és a kilépő sebességvektor irányát jegyezzük fel. (Igaz ezzel diszkrét idejű dinamikát kapunk.) Konvex biliárd esetén, a kerületen egy rögzített referencia-ponttól mért távolság elég a paraméterezéshez. Így a 4

dimenziós fázistér 2 dimenziós metszete elég információval szolgál a vizsgálatokhoz. Tehát a két fáziskoordinátát a fallal történő ütközés helye és a kilépő sebesség érintővel bezárt szöge fogja megadni. Bár számos paraméterezés lehetséges, és az irodalomban is többféle ismert, diplomamunkámban egyféle jelölést fogok használni. A korábbi cikkek eredményeit ezekre a koordinátákra transzformálva fogom közölni. Az általam vizsgált konvex, ovális biliárdokban ezek a következőképp definiálhatóak:

A golyó minden egyes visszapattanásához két változót rendelhetünk (lásd 1. ábra): az egyik ($0 \leq k < |\Gamma|$, ahol $|\Gamma|$ jelöli biliárd Γ falának hosszát, és $k \in \mathbb{R}$) a visszapattanás helyének egy rögzített P_1 ponttól pozitív irányban mért távolsága. Ezt nevezem kerületi paraméternek. A másik ($0 \leq \varphi \leq \pi$) pedig a visszaverődés iránya és a fal – óramutató járásával ellentétes irányba mutató – érintőjével bezárt szög. Ezt nevezem visszaverődési szögnek. Az így kapott N cylinder az összes lehetséges visszaverődést tartalmazza. A cylinder egyértelműen leképezhető a sík egy tartományára, úgy hogy minden pont egy következő ütközést egyértelműen határozzon meg. Ezzel a trajektória pontjainak koordinátáit adja meg a síkon. Ezek alapján a síknak ezen a tartományát tekinthetjük fázistérnek.



1. ábra A két koordináta

Biliárdokban létezik egy természetes, a Lebesgue-mértékre abszolút folytonos invariáns mérték [2], melynek sűrűségfüggvénye a visszaverődési szögének (φ) szinusza. Ergodikus komponensek alatt, mindig az erre a mértékre vonatkozó ergodikus komponenseket értem. Ezért numerikus szimulációkban ezek jó közelítéssel, mint a fázistér egy tartományát sűrűn bejáró pályák figyelhetőek meg.

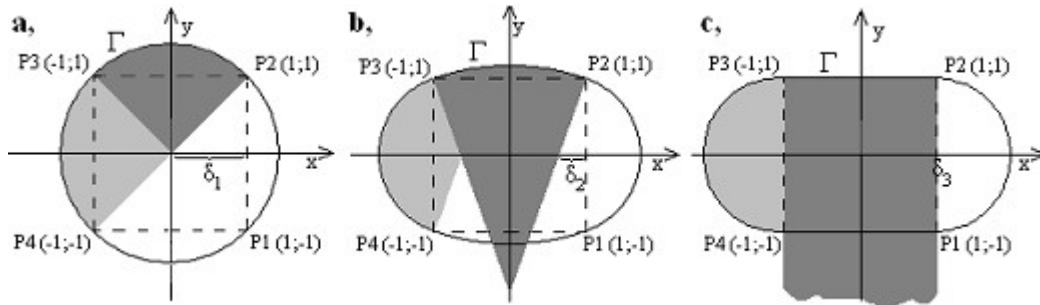
Az általam vizsgált rendszer a kevert dinamika jelenségeinek vizsgálatára jött létre. Ez a konvex, ovális biliárd folytonosan transzformálható, melyet két változó paraméterez. A rendszer ebben a formában alkalmas a sztochasztikus átmenet tanulmányozására.

II. Előzmények

Az előzményként szolgáló cikkek a sík egy konvex tartományában mozgó tömegpont viselkedésének numerikus vizsgálatairól számolnak be. Ez a tartomány egy egy paraméterrel megadható, folytonos transzformációval deformálható, sztochasztikus átmenetet képezve az integrálható és az ergodikus viselkedés között. Mindkét határeset jól ismert, tanulmányozott rendszer. Az egyik határesetet a körbiliárd, a másikat a Bunimovich-féle stadion [4] biliárd adja.

II. 1. A Benettin-Strelcyn biliárd [3]

Legyen Q egy kompakt konvex tartomány, amit az egyszer differenciálható Γ határol. Ezt a határt négy körívből állítjuk össze, úgy hogy azok páronként közös érintővel rendelkezzenek. Ezt úgy érjük el, hogy az ívek egy rögzített négyzet sarkaiban (P_1, P_2, P_3, P_4) érintkeznek. A folytonos átmenetet $0 \leq \delta \leq 1$ paraméterezi, ami a P_1P_2 ív középpontjának a P_1P_2 szakasztól mért távolsága. Ez szimmetria okokból a P_3P_4 ív közepének a P_3P_4 szakasztól mért távolsága is. Ekkor $\delta=1$ jelenti a kört, és $\delta=0$ jelenti a stadiont. Az alábbi ábrán jól látszik, hogyan változnak a közös érintők és az ívhosszak, δ függvényében. Ha δ -t csökkentjük, a P_1P_2 és a P_3P_4 (világosszürke) ívek sugarai csökkennek, míg nyílásszögük növekszik, ezzel ellentétben a P_2P_3 (sötétszürke) és P_4P_1 ívek sugarai nőnek, de nyílásszögük csökken.



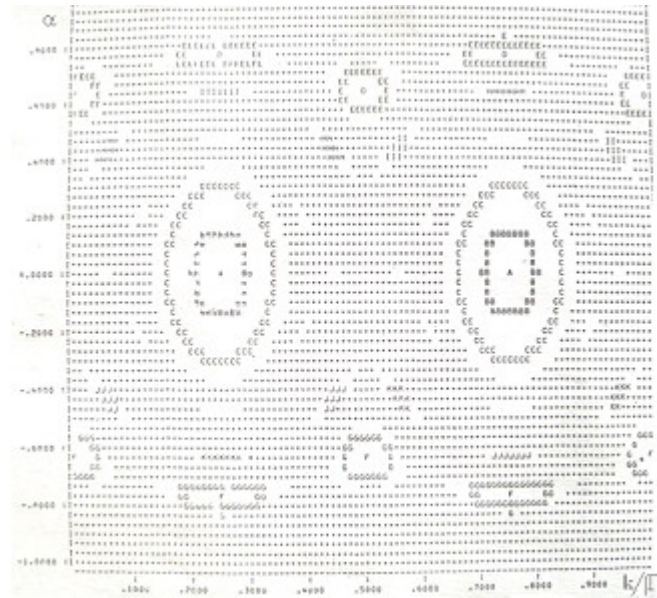
2. ábra A Benettin-Strelcyn biliárd geometriájának változása δ függvényében ($1=\delta_1 > \delta_2 > \delta_3=0$)

A körbiliárd fázistere invariáns tóruszok uniója, amelyekben a mozgás (kvázi-) periodikus. Továbbá létezik megmaradó mennyiség (jelen esetben pl: a visszaverődés szöge (φ), vagy az $L=x*\sin(\beta)-y*\cos(\beta)$ kifejezés, ahol x és y a tömegpont Descartes koordinátái, ill. β a sebességvektor x tengellyel bezárt szöge), a körbiliárd teljesen integrálható viselkedést mutat. A stadion ezzel szemben erős sztochasztikus tulajdonságokkal rendelkezik. Mivel a stadion ergodikus [4], az átmenet végére az invariáns tóruszok eltűnése garantált. Továbbá az átmenet folytonossága az ergodikus és az integrálható komponensek egymás kárára történő növekedését/csökkenését sugallja, bár a $0 < \delta < 1$ köztes esetek ergodikus tulajdonságairól nincsenek elméleti eredmények

A cikk írói lényegében a bevezetésben bemutatott paraméterezéssel éltek. Egyik legfőbb vizsgálati módszerük a grafikus analízis volt. A geometria változtatásának fázistérre gyakorolt hatását kísérték figyelemmel így. A szimulált pályák vizsgálatához csak a visszapattanásokhoz rendelt koordinátákat számolták ki, majd ezeket ábrázolták. Adott δ mellett több kezdeti feltétellel indítottak pályákat egyszerre, így kapták az egyes geometriákhoz tartozó jellegzetes fázisportrékat (pl.: 3. ábra).

A fázistér legjellegzetesebb elemei:

- Az n ütközés alatt záródó periodikus pálya, a fázistérben n db izolált pontként jelenik meg.
- Ezzel szemben a kvázi-periodikus pálya pontjai mind egy határozott, zárt görbén helyezkednek el (sűrűn).
- A sztochasztikus trajektóriák pontjai pedig egy határozott tartományt töltenek meg (sűrűn).



3. Ábra A fázistér ábrázolása $\delta=0,6$ esetén, az 1978-as cikkben [3]

(az ábrán a különböző betűk és szimbólumok különböző trajektóriák pontjait ábrázolják)

Stadion határesetben a fázisteret egyetlen ergodikus komponens tölti ki, azaz majdnem minden kezdeti feltétellel indított pálya bejárja a teljes fázisteret (a periodikus pályák nullmértékű halmaza alkotnak). A kaotikus fázisportré a legkisebb perturbációra azonban megváltozik, két sziget jelenik meg. Ez a két sziget a kétféle periódusú stabil pálya körül kialakuló integrálható tartományt reprezentálja. Ez a pálya a 4. ábra jelöléseivel a P1P4 és a P2P3 ívek felezőpontjai között pattog oda-vissza, 90° -os visszaverődési szöggel. Ennek megfelelően a pálya képe a fázistéren a P1P4 és a P2P3 szakaszok felénél, $\pi/2$ szögnél figyelhető meg (kék pontok), a körülötte kialakuló sziget középpontjaként.

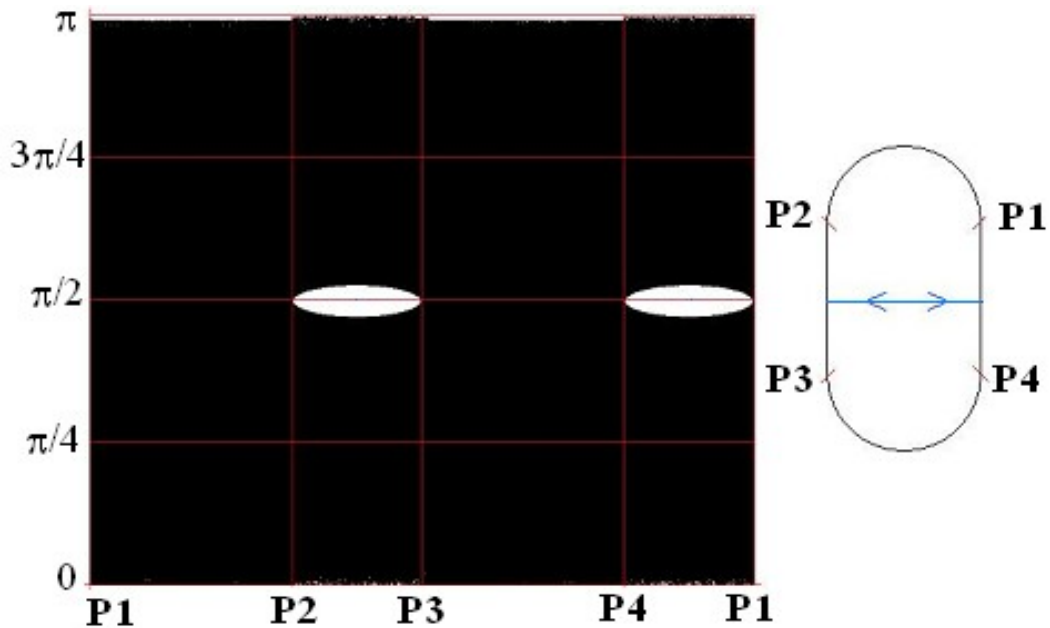
Kis mértékben növelve δ -t, a stadionhoz közel ($\delta \sim 0$) még mindig csak két sziget figyelhető meg. Tovább növelve viszont egyre több sziget jelenik meg. Bennük periodikus és kvázi-periodikus pályák találhatóak. Ellenőrizhető, hogy egyszerű periodikus pályák adják a szigetek közepét. Ezek köré rendeződnek a (kvázi-)periodikus pályák pontjai. Pontosabban a szigetek pozitív mértékű része invariáns pályákkal fedhető le. Tehát a szigetek belső szerkezete ilyen értelemben rendezett. Tehát az egyre nagyobb számban megjelenő szigetek képviselik a rendezett fázist.

A szigeteket sztochasztikus tenger veszi körül, ami $\delta < 0,75$ esetén egy ergodikus komponenshez tartozó pontokból áll. A tenger majdnem minden pontjára igaz, hogy az onnan indított pálya sűrűn bejárja a kaotikus tartományt. Amint δ eléri ezt a kritikus értéket, a tenger szétválik két, majd a körhöz tovább közeledve egyre több invariáns komponensre. Ezen komponensek pontjai növekvő számú, egyre keskenyebb

(vízszintesnek egyre inkább nevezhető) sávba rendeződnek. Bár nyilvánvaló, de a cikk mégsem említi, hogy a keskenyedő sávokban a szigetek mérete szintén jelentős mértékben csökken. A δ további növelésével az egyre több keskeny sávból álló fázisportré, egyre inkább a kör, vonalas fázisképre hasonlít.

Kör határesetben minden pálya megőrzi a visszaverődési szögét, azaz az egyik koordinátája rögzített. Ezért bármely pálya pontjai a fázistér egy-egy rögzített szögű egyenesén fognak elhelyezkedni. Ezáltal a fázisportré végtelen sok párhuzamos vonalból fog felépülni. Egy-egy vonalhoz tartozó pályák vagy véges sok pontból, vagy a vonalon sűrűn elhelyezkedő megszámlálhatóan végtelen sok pontból állnak.

Összességében a cikk felvázolta a geometria változásával járó fázistérbeli változások főbb vonásait, ill. a kvalitatív változásokat. Bár azt a cikk nem hangsúlyozza, de a dinamika csak a stadion határesetben ergodikus teljesen. Ez a legfontosabb különbség az általam vizsgált biliárdcsaládhoz képest (lásd később: IV. fejezet).



4. ábra A 2 periódusú sziget a fázistérben (balra, a programom ábráján) és a stabil 2 periódusú pálya, ami körül a sziget születik (jobbra). A baloldali ábrán a szigetek közepén egy-egy (nehezen észrevehető) kék pont ábrázolja a jobboldali ábra kék színnel jelölt traiektóriáit.

A grafikus analízis során megfigyelt legfontosabb jelenség az integrálható és az ergodikus komponens(ek) együttes létezése volt, sőt kimutatták több különböző, invariáns ergodikus komponens egyidejű létezését is. Bár a cikk ezen eredményei és sugallatai mind numerikus vizsgálatokon alapulnak, más elméleti eredmények fényében mégis alkothatunk ezek alapján egy – ezeket magyarázó – heurisztikus képet.

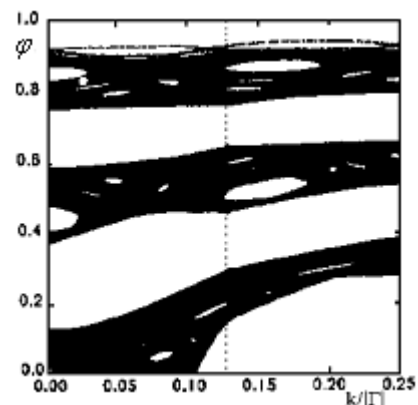
II. 2. A Benettin-Strelcyn biliárd felülvizsgálata [5]

Néhány évvel később jelent meg Hénon és Wisdom kiegészítő jellegű cikke.

Az irodalomban a legtöbb gyakran vizsgált dinamikai rendszer olyan egyenletekkel írható le, amelyek megfelelően sokszor differenciálhatóak (reguláris eset), hogy a KAM-tételt [6, 7] alkalmazni lehessen. A tétel szerint elliptikus periodikus pályák körül szigetek alakulnak ki, bizonyos nem-degeneráltsági feltételek teljesülése esetén. Adott területtartó leképezés fix-pontjának szűk környezetében a dinamika lineáris rendben egy forgatásnak felel meg. A nem-degeneráltsági feltételek ezen forgatás szögére (az ún. forgatási számra) vonatkoznak. Ez a tétel nagyon hasznos lenne több jelenség leírásához. De a biliárd határvonalának görbülete nem folytonos, négy pontban is szakadása van. Ez diszkontinuitásokat idéz elő a hozzárendelt leképezés elsőrendű deriváltjában is, ezért az említett tétel nem alkalmazható. A korábbi cikk szerint a kaotikus tartományban nincs szembeutó különbség a reguláris esethez képest. A felülvizsgálat szerint viszont, az invariáns görbék tulajdonságai ettől jellegükben eltérnek.

Néhány millió pont szimulálásával és grafikus analízis segítségével pontosították az előző cikk szimulációs eredményeit. A kaotikus tenger kettéválását ők is δ 0,75 és 0,76 közötti értékénél figyelték meg. A cikk szerint az ilyen jellegű különválásoknál egy-egy transzverzális invariáns görbe feltételezése indokolt, ami a komponensek között helyezkedik el. Így a transzformáció során, a körhöz közeledve a növekvő számú egyre vízszintesebb és keskenyebb sávok mellett, növekvő számú invariáns görbe is megjelenik. Ez a kép már nagyon hasonlít több, a KAM-tétellel leírható, vizsgált rendszer viselkedéséhez. A tétel szerint egy integrálható rendszer perturbációját alakjuk torzulásával ugyan, de több invariáns görbe is túlélheti. Ezek a túlélők pozitív mértékű halmazt képeznek. Ezért számítottak a cikk írói a köztes esetekben pozitív mértékű transzverzális invariáns görbehalmazra. Ettől azonban a numerikus eredmények lényegesen eltérnek, köztes esetekben csak véges számú transzverzális invariáns görbét kaptak. Ez az eltérés nem meglepő, ha figyelembe vesszük, hogy a tétel nem alkalmazható (a leképezés kellő számú deriválhatósága nem biztosított).

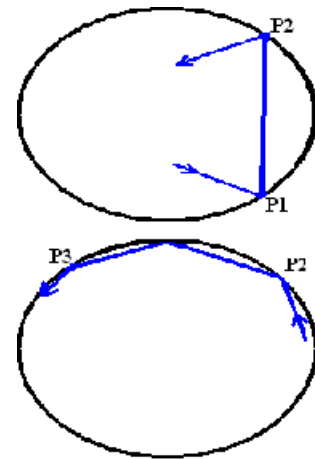
Vizsgálataik során, a derivált szakadásait okozó pontok – az ívek találkozási pontjai – hatására koncentráltak. Diszkontinuitási vonalnak nevezik azon pontok halmazát a fázistérben, amelyeknek a kerületi koordinátája az egyik ilyen pontot (P1,P2,P3,P4) határozza meg. Tapasztalataik szerint a fázistér bármely tartományán, ami két ilyen vonal között van, a leképezés analitikus. Ezek a vonalak nyilvánvalóan befolyásolják a szigetek sorsát is. Figyelemreméltónak találták, hogy egyik sziget sem lépi át a diszkontinuitási vonalakat, bár gyakran érintik azokat. Ezért a grafikus analízis során ezeket a vonalakat szaggatott vonallal jelölték (5.ábra).



5. Ábra Részlet a fázistérből, 3 ergodikus komponens látható, $\delta=0,85$ (a '82-es cikk alapján)

A diszkontinuitástól való tartózkodásnak két fontos következménye van. Az első, hogy a kettőperiódusú pálya (az egyenesedő ívek közepén, a normálisok egyenesén oda-vissza pattogó trajektória, lásd: II. 1. fejezet vége, illetve a IV. fejezet) körüli szigetet leszámítva, minden sziget reguláris tartományban marad, ahol nem találkozhat a szakadásokkal. Ezért a reguláris esethez hasonló általános képet fogja nyújtani a szigetek sorsa. Ezt igazolták tapasztalataik, azaz a sziget belsejében lévő kezdeti feltételek pozitív mértékű halmazára invariáns görbén marad a pálya. A második következmény, hogy a szigetek széle nem érintheti a diszkontinuitást. Heurisztikus magyarázatuk szerint, az invariáns görbéken sűrűn vannak a trajektória pontjai, és ha az a szakadást okozó pontokat érinti, sehol sem lesz a leképezés differenciálható. Így egy sima invariáns görbe nem lépheti át a diszkontinuitásokat.

Néhány invariáns görbe mégis túlélheti a szakadással való találkozást. Ezek történetesen a transzverzális invariáns görbék, amelyek az ergodikus komponenseket választják el. Ezt pedig a cikk írói az úgynevezett „kioltó-pályákkal” magyarázzák. Szerintük a diszkontinuitás átlépése csak akkor lehetséges, ha ennek káros hatásait valami kioltja. Erre az olyan pályáknak van esélye, amelyek két diszkontinuitási pontot is érintenek. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az első ütközés káros hatását, a második igyekszik ellensúlyozni. Az ilyen jellegű pályákra mutat a 6. ábra két egyszerű példát. Természetesen a két sarokkal való ütközés között több köztes pattanás is lehetséges, illetve a két diszkontinuitással való találkozás nem feltétlenül jelent két különböző sarkot.



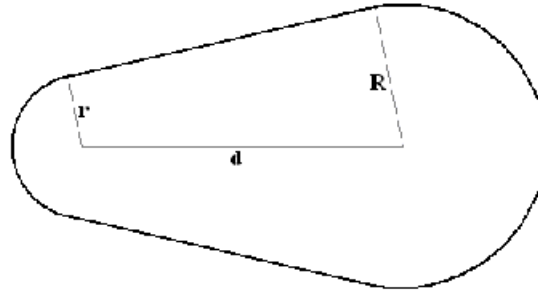
6. Ábra Példák a kioltó-pályákra

A szimulációk alapján kijelenthető, hogy a kaotikus tartományok határán vannak ilyen pályákat reprezentáló pontok. A numerikus eredmények továbbá azt is mutatják, hogy a transzverzális invariáns görbék, amennyiben léteznek, kioltó pályák pontjait tartalmazzák. Ennek viszont a fordítottja nem igaz. Adott δ értékre végtelen számú kioltó pálya létezik, de közülük csak véges számú fekszik invariáns görbén. Nem csoda hát, hogy az előző cikk vizsgálatai során nem tűntek fel, hisz véletlenszerű kezdeti feltételekkel nem lehet őket megtalálni. Ez fontos eltérés a reguláris esethez képest, ahol bármilyen kezdeti feltétel mellett több invariáns görbe is található.

A kioltó pályák léte szükséges, de nem elégséges feltétel invariáns görbék létezésére, és az ergodikus komponensek különválására. A cikk tanulsága szerint egy adott típusú kioltó-pálya pontjai, csak δ bizonyos értékei esetén fekszenek invariáns görbén. Ettől eltérő esetekben a különböző kaotikus komponensek összeolvadnak, és ezáltal megkülönböztethetetlenekké válnak.

II. 3. A tökbiliárd

A sík egy Q tartományát határolja Γ , ami két körívből és két egyenes szakaszból épül fel a következőképp: a két ív sugarai R , és r , ($R \geq r$), középpontjaik egymástól d távolságra helyezkednek el. Az íveket közös külső érintőjük által meghatározott egyenes szakaszok kötik össze (lásd 7. ábra). Az így felépülő geometriát hívják tökbiliárdnak. A tökbiliárral kapcsolatos vizsgálatok során a d távolságot, illetve a sugarak nagyságát szokták variálni [8, 11]. Ezek alapján a stadion is egy speciális tökbiliárd, ahol az ívek sugarai egyenlők.



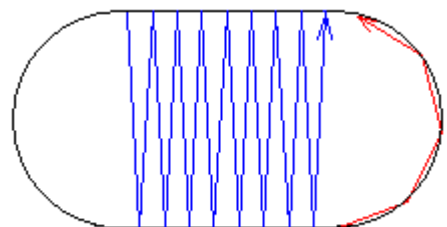
7. Ábra A tökbiliárd geometriája

Bunimovich megmutatta [4], hogy a stadionban a Ljapunov-exponens majdnem mindenhol pozitív, és hogy a stadion ergodikus. A tökbiliárdok is ergodikusak és hiperbolikusak. Bunimovich munkája a mindkét esetben működő mechanizmusra is rávilágított. Mindkét biliárdban a párhuzamos pályák ütközés után eleinte konvergálnak, fókuszálódás után viszont széttartanak. Ez fázistérbeli terjeszkedést is jelent, amennyiben tovább divergáltak, mint ameddig fókuszálódtak. Ez a folyamat jellemző a stadion és a tök esetére is. Ezért lehet mindkét esetben bizonyítani a hiperbolicitást Bunimovich módszerével.

A stadion és a tök másban is hasonlít egymásra. Mindkét rendszerben vannak kvázi-integrálható pályák, amelyek úgy viselkednek, mintha egy-egy integrálható trajektóriát követnének. Ezek a pályák véges, de tetszőlegesen hosszú időt tölthetnek integrálható pályák közelében, mielőtt bejárnák a teljes fázisteret. Ezért az ilyen mechanizmusok késleltetik, lassítják a keverést, és ezáltal a korrelációk lecsengését.

A stadionban ilyen jelenség pl. az ún. surranás, amikor a pálya a körív alakú fallal elég kis szögben találkozik, és így a fal mentén úgy surran végig, mintha egy körbiliárdban lenne (lásd 8. ábra). A pálya egészen addig, amíg a köríven marad, integrálhatónak tekinthető. Ez a jelenség a tökben is jelen van.

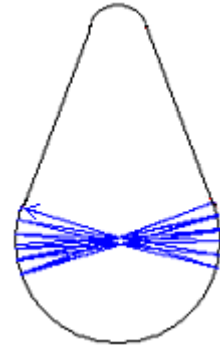
A stadion biliárd másik fontos kvázi-integrálható jellegzetessége az íveket összekötő egyenes oldalakon történő egymással szembe, oda-vissza pattogás (lásd 8. ábra). Ekkor az ütközések szöge nem változik egészen addig, amíg az egyik ívvel nem találkozik a pálya. Ez a jelenség a kvázi-integrálható pályákban véges, de tetszőlegesen hosszú integrálható szakaszt teremt. Ezzel szemben a tökben az ilyen jellegű szembepattogás nem lehet tetszőlegesen hosszú,



8. ábra A surranás (piros pálya) és a szembepattogás (kék pálya) stadionban

ezért ez a fajta késleltetés kisebb szerephez jut csak. Nem csoda, hisz a különböző sugarú íveket összekötő egyenes szakaszok nem párhuzamosak.

A tökbiliárd azonban rendelkezik egy más jellegű tulajdonsággal. Mivel az egyik ív nagyobb lehet, mint félkör, egy újfajta késleltetési mechanizmus jut szerephez. Ezen az íven bizonyos nagyszögű pattanások egy darabig viselkedhetnek úgy, mintha egy körben az átmérő közelében pattognának oda-vissza. Ez a viselkedés egészen addig tart, amíg a tömegpont nem pattan tovább a következő ívre. Egészen eddig nem vesz tudomást a geometria többi részéről, nem hat rá a többi ív. Erre a jelenségre mutat példát a 9. ábra. Ez a mechanizmus lassítja a korrelációk lecsengését, késlelteti a fázistér teljes bejárását. A surranástól eltérően ezek a visszaverődések nagyszögűek (közel 90° -osak), és így az invariáns mérték sűrűségfüggvényének megfelelően nagyobb mértékűek is egyben.



9. ábra Szembepattogás tökbén

Tehát a tökbiliárd kvalitatíve más, mint a stadion, hiszen itt a kvázi-integrálható mozgásokért más geometriai jellegzetesség felelős, mint a stadionban. Mindkét geometriában lassabb a korrelációk lecsengése exponenciálisnál, kvázi-integrálható mozgásoknak köszönhetően. A tökbén és a stadionban is alapvetően a szembepattogás határozza meg a lecsengés ütemét, hiszen a surranás mértéke eggyel kisebb nagyságrendű. A két jelenség együttes hatása, hogy a lecsengés mindkét esetben polinomiális, pontosabban $1/n$ nagyságrendű [8, 11], ahol n az iterációk száma.

Továbbá fontos megemlíteni, hogy a stadion kis perturbációja (a Benettin-Strelcyn transzformáció értelmében $\delta \sim 0$, de $\delta \neq 0$) a szembepattogás kvázi-integrálható viselkedését integrálhatóvá teszi, hiszen a majdnem egyenes ívek fókuszálni kezdenek. Az eddigi késleltető mechanizmus, az oda-vissza pattogás a 2 periódusú szigeten belüli periodikus és kvázi-periodikus pályákká változik. Ugyanez a tökbén másképp működik. Hasonló, kis perturbációk (lásd később) hatására a szembepattogás szerepe kvalitatíve nem változik.

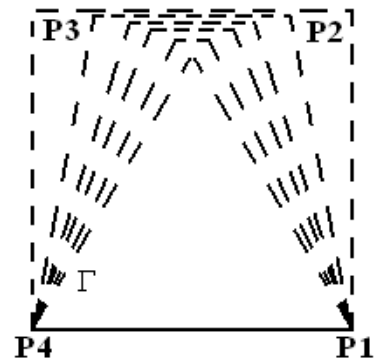
III. A kétparaméteres biliárdcsalád vizsgálata

III. 1. A geometria

Az előzményben összefoglalt cikkek folytonos átmenetet vizsgáltak rendezett és rendezetlen fázisterű rendszerek között. Grafikus analízis alapján vontak le következtetéseket a kevert fázisterről. Az általuk vizsgált modell fontos tulajdonsága, hogy teljesen ergodikus viselkedést csak a transzformációs paraméter egyik szélsőértékénél, azaz a stadion határesetben láttak. Ezek alapján jogosan merülhet fel a kérdés, hogy ezek a tanulságok mennyire általános érvényűek, mi az, ami a transzformáció sajátossága, és mi az, ami attól független.

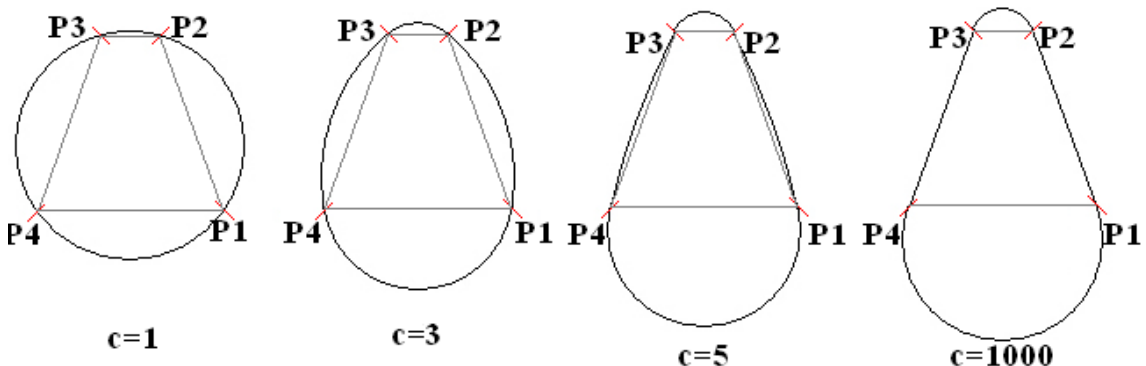
A tökbiliárd hasonló tulajdonságokat mutat [8], mint a stadion, és szintén átranzformálható körre. Azaz szintén alkalmas a rendezett-rendezetlen átmenet vizsgálatára. Sőt megfelelő paraméterezéssel határesetbe a kör-stadion átmenet is, amit már többen vizsgáltak. Ezért választottam ezt az általánosított transzformációt diplomamunkám tárgyául.

A tök-stadion-kör transzformáció a következő paraméterekkel kontrollálható: Adott a sík Q tartománya, amelyet a négy körívbeli Γ határol. Minden körív egy speciális húrtrapéz szomszédos csúcsait köti össze. A $P_1P_2P_3P_4$ húrtrapéz (lásd: 10. ábra) hosszabbik alapja és két szára egyenlően egységnyi hosszúságú. Így a trapéz megadására már csak egy szabadsági fok marad. A $0 \leq b \leq 1$ paraméter a húrtrapéz negyedik oldalhosszának felét – és ezzel magát a húrtrapézt – határozza meg. Tehát a húrtrapéz két lehetséges határa az egyenlő oldalú háromszög ($b=0$), illetve a négyzet ($b=1$). Az így kapott húrtrapéz természetesen még csak a keretét adja a transzformációnak.



10. Ábra A b paraméter által meghatározott néhány lehetséges húrtrapéz

A négy körív a P_1, P_2, P_3, P_4 pontokban páronként közös érintővel kapcsolódik. Sugaraik nagyságát pedig a második $1 \leq c$ valós paraméter határozza meg. Ez az, ami a Benettin-Strelcyn-féle átmenethez hasonlóan a rendezett-rendezetlen átmenet paraméterezi. Értéke határozza meg a P_1P_2 , illetve P_3P_4 (a továbbiakban nagy, vagy kiegyenesedő ívek) és a P_4P_1 (a továbbiakban közepes ív) sugarainak arányát, és ezzel a P_2P_3 ív (a továbbiakban kis ív) nagyságát is (a függés jól látható a 11. ábrán). Így tehát az egyik határeset, mikor a sugararány éppen egy, és a körívek a húrtrapéz köré



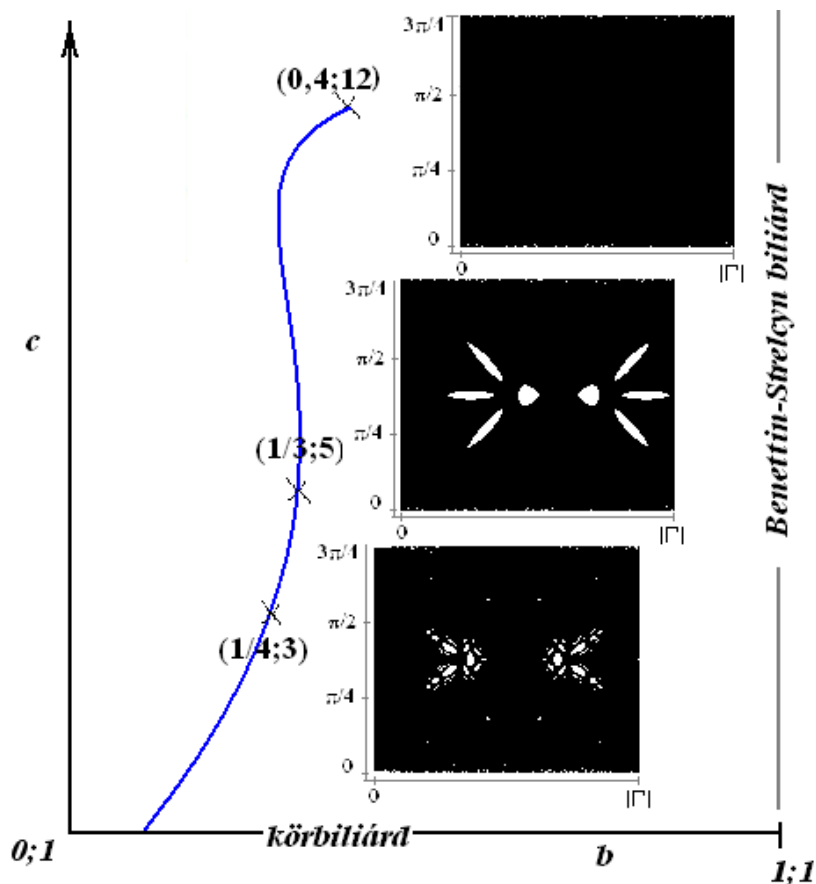
11. Ábra A c sugararány paraméterezi az átmenetet körből tökbe, adott b mellett (itt $b=1/3$)

írható kört alkotják, ez a teljesen integrálható viselkedésű körbiliárdot jelenti.

A másik határeset, amikor $c=\infty$, ekkor a P1P2, illetve a P3P4 ívek teljesen kiegyenesednek. Ez pedig a jól ismert tökbiliárdot adja.

Mivel a két paraméter egymástól független, bármilyen b érték mellett kapott eredmény összehasonlítható más eredményekkel. A második, azaz a c paraméter lehetséges értékei végtelen halmazt képeznek. Ez azt jelenti, hogy a Benettin-Strelcyn transzformáció paraméteréhez képest a c paraméter tere ki van nyújtva. Ez pedig a vizsgálat szempontjából praktikus, hiszen az ergodicitás kialakulását kívántam tanulmányozni, ami várakozásaim szerint még a határeset elérése előtt megtörténik. A nyújtott paraméterter pedig részletesebb vizsgálatot enged.

Ezzel a transzformációval a paraméterter bármely pontja meghatároz egy konkrét geometriát, ezért bármilyen görbe mentén vizsgálhatjuk a fázistér változásait. Célszerűen a körből bármilyen tök transzformálható, illetve a transzformáció bármilyen útvonalon haladhat. A 12. ábra egy lehetséges útvonalat ábrázol, a jelölt pontok mellett szemléltetésül az adott geometria fázisportróját ábrázoltam (a fáziskép függőleges és vízszintes koordinátái a következők: a visszaverődés szöge, ill. a kerület mentén P1-től mért távolság).



12. Ábra A paraméterter bármilyen görbéje mentén vizsgálódhatunk. A $b=1$ speciális esetben a Benettin-Strelcyn-féle transzformációt kapjuk vissza. A $c=1$ egyenes minden pontja körbiliárdot ad. (a fázisportrék vízszintes tengelyének maximuma az adott geometriát határoló Γ görbe teljes kerülete)

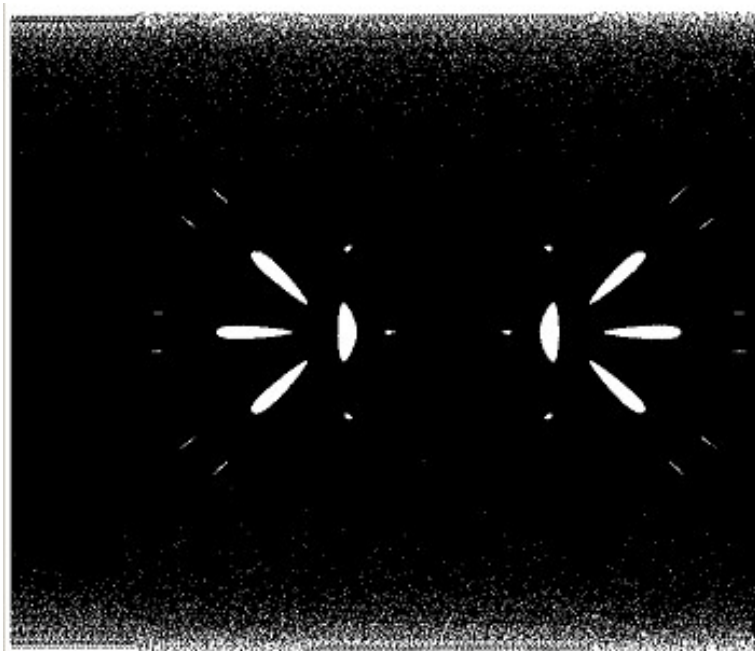
A kapott transzformációhalmaz a Benettin-Strelcyn transzformáció általánosítása. A kapott kétparaméteres biliárdcsalád a korábbi eredmények új megvilágításba helyezéséhez, illetve általánosításához igen hasznosnak bizonyult.

III. 2. A program, és a kiértékelés módszerei

A program (lásd: DVD-melléklet, `/progarm/program2.zip`, vagy <http://www.renyi.hu/~bp/miki/program/program2.zip>) írásakor az elsődleges szempontok a pontosság és a gyorsaság volt. A pontosság fontos volt, hiszen – a cikkek tanulsága szerint – meg kell tudni különböztetni különböző ergodikus komponenseket egymástól. A C++-ban megírt algoritmus 64 bites lebegőpontos változókkal számol, ami a cikkek számolási pontosságát meghaladja. Egy-egy iterációs lépésben az egyenes vonalú pálya és a biliárdasztal metszéspontját számolja derékszögű koordinátarendszerben, majd a visszaverődésnél egy új egységvektort, ami a reflektált pálya irányába mutat. Minden lépés végén az ütközés két koordinátáját kapjuk, azaz a visszapattnás helyét és szögét.

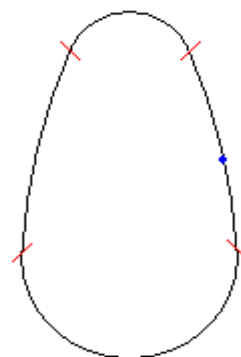
Ami a számolási sebességet illeti: a cikkek szerzői egy-egy kezdeti feltételből indított pályát 10 milliós nagyságrendű iterációs lépésig követték. Ez a programmal körül-belül 2-2,5 perc alatt szimulálható le egy ma átlagosnak számító asztali számítógépen. Ez lényegesen gyorsabb, mint a korábbi szimulációk, ezért sokkal részletesebb vizsgálatra nyílik lehetőség.

Eleinte a kiértékelést külön programokkal próbáltam megoldani, de ez sokkal lassabbnak bizonyult, mint maga a szimuláció, és több ismétlődő lépést is tartalmazott. Ezért határoztam úgy, hogy a kapott adatok kiértékelését is megoldom a saját programomon belül. Tehát kibővíttem az adatok ábrázolásával, a geometriát megjelenítő vázlattal, illetve a fázistéren való tájékozódást segítő eszközökkel. A megjelenített fázisterek normáltak, azaz a kerületi paraméterek a teljes kerülettel le vannak osztva. Ezzel a különböző geometriák fázisportréi könnyebben összehasonlíthatók. Szintén az összehasonlíthatóságot segíti, hogy ezek az ábrák, úgy mint az adatok és a vázlatok, elmenthetőek, illetve később visszatölthetőek. Tehát nem szükséges annyiszor szimulálni, ahányszor csak kérdés merül fel az adott geometriával kapcsolatban.



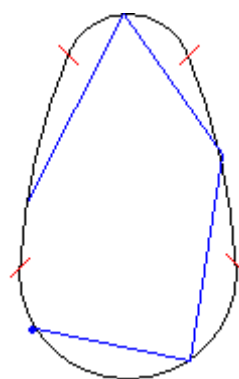
13. Ábra A programmal szimulált fáziskép (1 millió pontot ábrázol), vízszintes tengelyen: a $P1$ -től mért kerületi paraméter, függőleges tengelyen: a visszaverődési szög (0° -tól 180° -ig) (a koordináták leolvasása a programon belül történik, lásd később)

A tájékozódást segítő eszközök sokat könnyítenek dolgunkon, ezért a fáziskép mellé már indokolatlan lenne koordinátarendszert rajzolni, vagy léptéket mellékelni. Ilyen eszköz pl. a koordináták leolvasását végző kis algoritmus, ami az egérmutató aktuális pozíciója alapján az aktuális Descartes- és fáziskoordinátákat is megjeleníti a kezelőfelületen. Az aktuális fázispont kerületi koordinátájának megfelelő pontot, a geometriát vázoló ábrán egy kék pöttyel jelöli a program (lásd 14. ábra), a szingularitások helyét pedig piros vonallal. Ezzel a fázistér jellegzetességeinek valós térbeli helyéről kapunk képet, illetve szigetek, vagy transzverzális invariáns görbéket okozó pályák és a szingularitások viszonyáról szerezhethünk első benyomásokat.



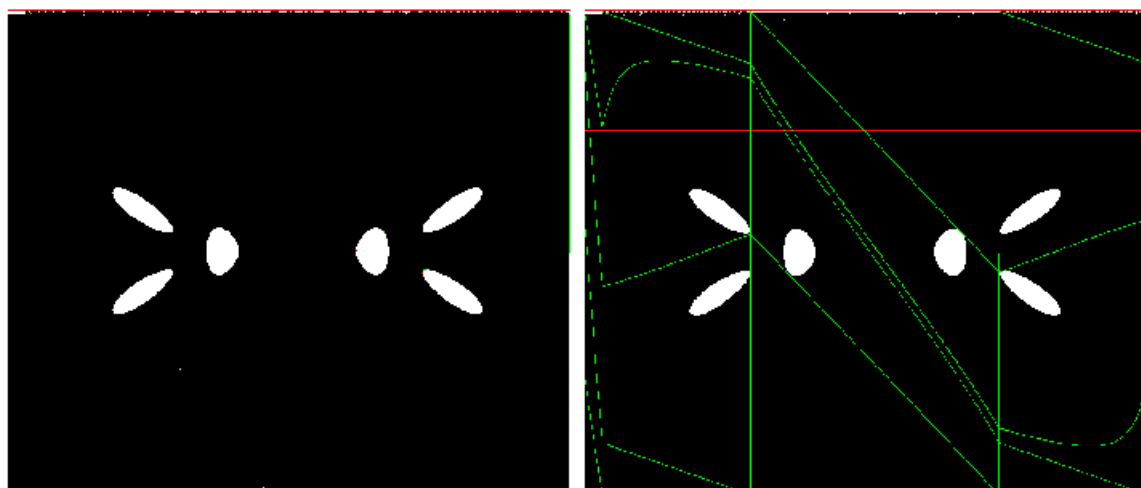
14. Ábra A geometriát ábrázoló vázlat és az aktuális pozíciót jelölő kék pont

Az egérmutató által meghatározott koordináták – mint a fázistér bármely koordinátája – kezdeti feltételként is szolgálhatnak néhány iterációs lépésnek. Az így kapott – az egérmutató helyétől függő – rövid pálya a vázlaton szintén megjeleníthető. A pálya hosszát, azaz az iterációk számát a kezelőfelületen szintén be lehet állítani, ami a periodikus pályák felderítését és osztályozását nagymértékben elősegíti. Ezzel már azok a pontok is felderíthetők a fázistérben, amelyek a szingularitással való találkozások valamely ősképei, de utalhat több sziget egymás közötti kapcsolatára, illetve segíthet megérteni egy-egy periodikus pálya megszűnését a geometria változásával. Természetesen a vázlat ebben a formában is elmenthető, és később, például egyező periódusú pályák más-más geometriák mellett is összehasonlíthatóak lesznek.



15. Ábra Az aktuális pontból indított rövid pálya

A fázisportrén való tájékozódást, és a jelenségek megértését szolgálja továbbá az opcionálisan megjeleníthető rács. Ez jellegzetes vonalak ábrázolását jelenti a fázisképen. Azon fázispontokat, amelyek szöge 45° , 90° , 135° piros vonal jelöli. Azokat a pontokat pedig, amelyekből indulva az első visszaverődés valamelyik szingularitásban történik, zöld vonal jelzi. Ez a fajta jelölés áttekinthetőbb megfigyelést tesz lehetővé és rávilágít a szingularitások szerepére. (16. ábra)



16. Ábra Fázisportré rács nélkül és ráccsal

Ezen funkciókkal könnyen rendszerezhető, és jól áttekinthető adatbázist tudtam létrehozni a különböző geometriákhoz tartozó fázisportrékból. Az elmentett fázisképek nevében először a b paraméter, majd a sugárány is szerepel, ami a böngészést könnyebbé teszi. Sőt a fázisportré változásairól készült képek abc sorrendben (b és c szerint lexikografikusan) következnek egymás után, ezért a képnézegető szoftverek többségével úgy vizsgálódhatunk, hogy egyszerűen csak sorban nézegetjük az egymást követő képeket.

Amennyiben az adott geometriában más kezdeti feltétellel is szeretnénk egy pályát indítani, lehetőség van az adatok egy fázisképen való ábrázolására. Sőt, ezt akár úgy is elérhetjük, hogy a kezdeti feltételt az egér segítségével adjuk meg. A kérdéses kezdeti feltételt ábrázoló fázispontra duplán kattintva a szimuláció az adott pontból indul. Ezeket természetesen más-más színnel rajzoltathatjuk. Ez igen hasznos, például szigetek belső szerkezetének felderítésére.

Grafikus analízis során lehetőség nyílik az aktuális pontból induló pálya mentén jelezni a következő alkalmat, amikor a szingularitás közelébe ér a pálya. Ez a funkció csak közvetve segíti az alakzatok osztályozását, és a fázistér feltérképezését, elsősorban ellenőrző szerepe van.

Ehhez hasonló, a kiértékelést segítő eszköz az adott pontból indított pálya periódusát becsülő algoritmus. Ez a rész az első három visszatérés iterációs lépéseinek számából számol legnagyobb közös osztót, így egy becslést adva a pálya periódusára. Azt nevezem visszatérésnek, amikor az adott ütközés utáni fáziskoordináták megfelelően „közel” lesznek a kezdeti feltételhez. Ezért is nevezem ezt a funkciót periódus-becslésnek, mert a pálya mentén nem a kezdeti feltétellel teljesen egyező fáziskoordinátákat jelzi, hanem csak egy kis környezetük következő felbukkanását. Erre azért van szükség, mert egyrészt a kattintás pontossága egy pixelnek megfelelő fázisterület, azon belül nincs lehetőség további finomításra (csak nagyítás útján, lásd később). Másrészt hogy az esetleges numerikus hibák ellenére is meg lehessen állapítani, hogy egy-egy sziget milyen pálya körül alakul ki, és ne csak a vázlat alapján kialakuló szemléletre alapozzunk. Ezt a fajta „közelséget” az érzékenység paraméterrel lehet beállítani.

Ezzel a becsült, vagy a manuálisan megadott periódussal pedig képes a program a pálya stabilitását kiszámolni. Ez egy fontos előrelépés az eddigi szimulációs eljárásokhoz képest. Lineáris rendű stabilitás-vizsgálathoz a dinamika érintő-leképezését kell kiszámolnunk. Ezt viszont nem a fázistér koordinátaiban, hanem egy a biliárd-irodalomban gyakran használt konvenciónak megfelelően az ún. ortogonális szelés koordinátaiban számoljuk. Ennek a konvenciónak az előnye, hogy egy vetítéssel lényegében kitranszformáljuk a sűrűségfüggvényt, és az új koordinátákban területtartó leképezéshez jutunk. Az ortogonális szelés dr, dv koordinátáinak jelentése a következő. Tekintsük az ütközést épp elhagyó trajektóriát, és (1) toljuk el a sebességre merőleges irányban dr -rel (így egy az eredetivel párhuzamos trajektóriát kapunk); (2) indítsuk el a trajektóriát az eredeti kiinduló-pontból, $\mathbf{v} + dv \cdot \mathbf{a}$ sebességvektorral, ahol a dv infinitezimális, \mathbf{a} pedig merőleges \mathbf{v} -re, az eredeti sebességvektorra. Stabilitás (s) alatt, az elemi dr, dv perturbáció egy periódus alatt történő megváltozását (lineáris rendben) leíró, transzformációs mátrixnak a nyomát értem [2]. Mivel a leképezés területtartó, a transzformációs mátrix egységnyi determinánsú lesz.

Az elemi perturbáció a következőképp változik [2]:

- Szabad repülés során:

$$\begin{pmatrix} dr' \\ dv' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr + \tau dv \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dv \end{pmatrix}$$

ahol τ a szabad repülés idejét/hosszát jelöli.

- Ütközésnél pedig:

$$\begin{pmatrix} dr' \\ dv' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2K}{\sin(\varphi)} dr + dv \\ \frac{2K}{\sin(\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2K}{\sin(\varphi)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dv \end{pmatrix}$$

ahol K a fal görbületét jelenti ($K = \frac{-1}{r}$, ahol r az aktuális ív sugara, és $0 > K$,

hiszen az ívek normálisa kifelé mutat, így a trajektória egy negatív görbületet érez), φ pedig a pálya érintővel bezárt szöge.

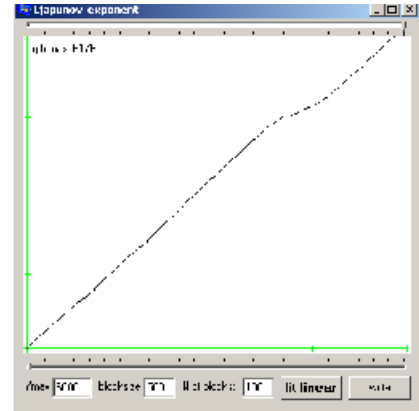
Ezekből az építőelemekből bármilyen pálya mentén számítható a transzformációs mátrix, illetve a perturbáció megváltozása. Egy iterációs lépés alatt egy szabad repülés és egy ütközés történik, ez a következő mátrixszal írható le:

$$\begin{pmatrix} dr'' \\ dv'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2K}{\sin(\varphi)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ \frac{2K}{\sin(\varphi)} & 1 + \frac{2K\tau}{\sin(\varphi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dv \end{pmatrix}$$

Tehát a pálya mentén minden szabad repülés és ütközés mátrixát sorban összeszorozva kapjuk a pályára vonatkozó transzformációs mátrixot, ami az elemi dr, dv perturbáció megváltozását írja le. Periodikus pálya mentén egy periódust számolva a kiindulási pont környezetébe történő első visszatérés leképezést kapjuk meg lineáris rendben. Az egységnyi determinánsú mátrixnak a sajátértékei és az egységkör közötti viszony határozza meg a pályák jellegét. Ha a sajátértékek az egységkörtől találhatók komplex konjugáltak, a mátrix nyoma $|s| < 2$, és az adott pálya elliptikus. Ha sajátértékek valósak, a nyom $|s| > 2$, a pálya hiperbolikus. Degenerált sajátértékek esetén pedig a nyom éppen $s = 2$, és a leírt trajektória parabolikus. A program ezen funkciója az egér jobb gombjának lenyomásával működtethető, az aktuális fázispontot megadva kezdeti feltételnek. Ez a vizsgálatok során, a jelenségek okainak kutatásában nagyon hasznosnak bizonyult. Már a cikkek szerzői is rámutattak, hogy a szigetek középpontjai periodikus pályákhoz tartoznak. Ennek a funkciónak nem titkolt célja, ennek az összefüggésnek az alátámasztása volt (lásd IV. fejezet), illetve a szigetméret és a periodikus pálya stabilitása közötti kapcsolat vizsgálata.

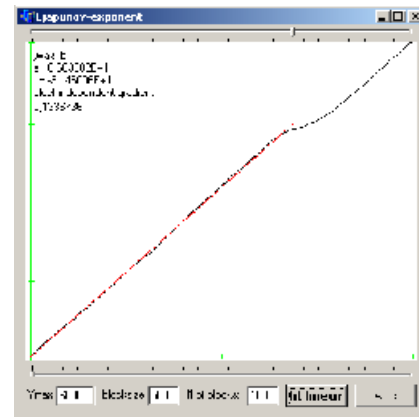
A következő funkció már sokkal inkább az ergodikus komponensek tanulmányozását segíti. Ha az „Lg(Tr) graph to Ljapunov exponent” jelölőnégyzet be van jelölve, a jobb gomb fázisképen történő kattintásával újabb funkció csalogatható elő. Ekkor egy új ablak jelenik meg, amelyen egy grafikon és néhány kezelőszerv

található. A grafikon a fáziskép adott pontjából indított pálya mentén számolt mátrixok nyomának természetes alapú logaritmusát ábrázolja az iterációs lépések számának függvényében. Ennek a függvénynek a meredeksége határozza meg az ún. Ljapunov-exponenst, ami a káosz egyik fontos mérőszáma. Ergodikus, hiperbolikus esetben bármely trajektória – ami sűrűn bejárja a fázisteret – mátrixának nyoma exponenciálisan növekszik, $exp(\lambda t)$ ütemben, ahol t a lépések száma, ill. λ a Ljapunov-exponens. Ez a mérőszám az adott ergodikus komponensre jellemző. Stabil periodikus pályákon viszont zérus, hiszen stabil pályák mentén a mátrixok nyoma nem növekszik.



17. ábra Felugró-ablak a Ljapunov-exponens meghatározásához

A grafikon ábrázolására több okból is szükség van. Először is a kezdeti ingadozások, tranzienst jelenségek észleléséhez, és a meredekség számolásánál ennek elkerüléséhez. Másodsor pedig több ergodikus komponens együttes jelenlétére is számítunk. Különböző komponensekben pedig nem zárható ki különböző meredekségek megjelenése. Ennek megfelelő kezeléséhez érdemes a grafikonra hagyatkoznunk. Alapértelmezésben a $lg(tr)max$, azaz a legnagyobb számolt érték látható a grafikon bal felső sarkában. Ha a görbe kilógna, a függőleges tengely maximuma az Ymax felirat mellett átállítható. Ezen az ablakon található még az egyenes-illesztő gomb: „fit linear” felirattal. A gomb lenyomása a felső és alsó csúszkával határolt tartományra illeszt egyenest. Ennek eredménye az ablak bal felső sarkába kerül kiírásra.



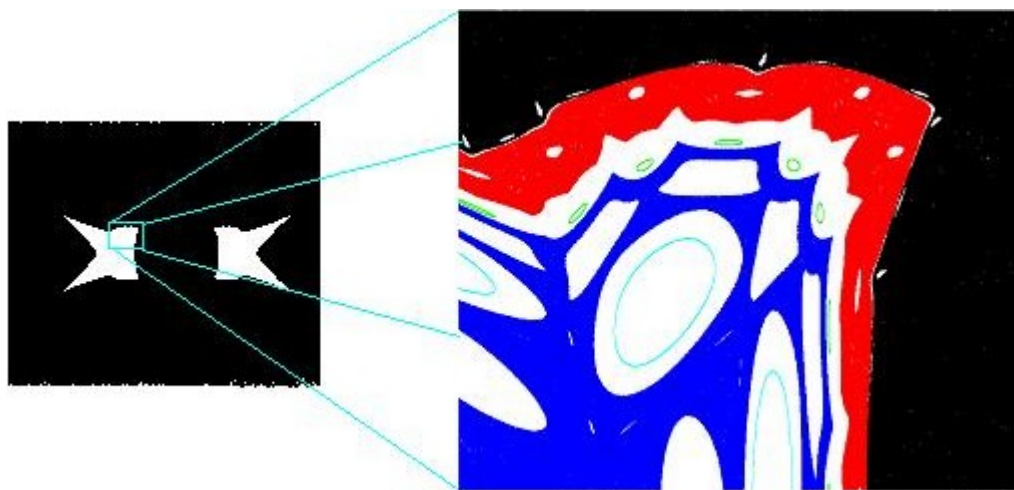
18. ábra Egyenes-illesztés adott tartományra

A számolás gyorsítása és a túlsordulások elkerülése miatt mind az ábrázolás, mind a számolás kisebb blokkok segítségével történik. Egy-egy blokk a blokkméretnek megfelelő számú iterációs lépést fog össze egy transzformációs mátrixszá. A következő blokk számolását az előző blokk végpontjából kezdi. Az így kapott mátrixok rövid trajektória-szakaszokat írnak le. Így tulajdonképpen a blokkszámának megfelelő számú blokkméret-hosszú pályadarabokat kapunk. Más illesztések meredekségeinek összehasonlításához számolja a program a blokk-független meredekséget, ami a blokkok számától és méretétől független. Ehhez a „write” feliratú gombbal az aktuális meredekséget el is tárolhatjuk. (ez a blokk-független mérőszám a „ljap.dat” nevű fájlba kerül kiírásra az adott geometria b és c paramétereit után)

A szimulált fáziskép felbontása gyakran nem teszi lehetővé finomabb részletek észrevételét, vagy a periódus-ellenőrzés, stabilitás-vizsgálat, vagy a Ljapunov-exponens számításához kellő pontosságú kezdeti feltétel, kattintással történő megadását. Éppen ezért rendelkezik a program nagyítás funkcióval is (egy nagyított képet mutat be a 19.

ábra). A fázistér bármely tartománya megjeleníthető részletesebben is, csak az egér jobb gombját lenyomva tartva ki kell jelölni a kérdéses területet. Természetesen a program összes funkciója működik a nagyított képen is, azaz mind a tájékozódást, mind a kiértékelést segítő eszközök használhatóak. Tehát elképzelhető, hogy a fázistér eredeti felbontásában nem tűnik fel egy kis sziget, amire ránagyítva folytathatjuk a szimulációt, sőt a feltárt kis sziget belső szerkezetét is fel tudjuk deríteni, a benne lévő periodikus pályák numerikus vizsgálatával együtt. Erről az új szigetről azonnal megtudhatjuk, hogy milyen periodikus pálya körül alakult ki, és hogy az vázlatosan hogy néz ki a valós térben. Ezen információk elmentésével az adott sziget növekedését, zsugorodását, születését, eltűnését figyelemmel kísérhetjük, illetve azok körülményeit vizsgálhatjuk.

Az így készült nagyított képet is el tudjuk menteni, mert a program az adott tartomány adataival együtt menti el a bitképet, hogy később ugyanolyan felbontással tölthessük be és elemezhesük tovább.



19. Ábra A fázistér egy része kinagyítva, a nagyított fázisképbe pedig több különböző pályát szimuláltam, különböző színekkel (összesen kb. 10^8 db pontból vett részlet)

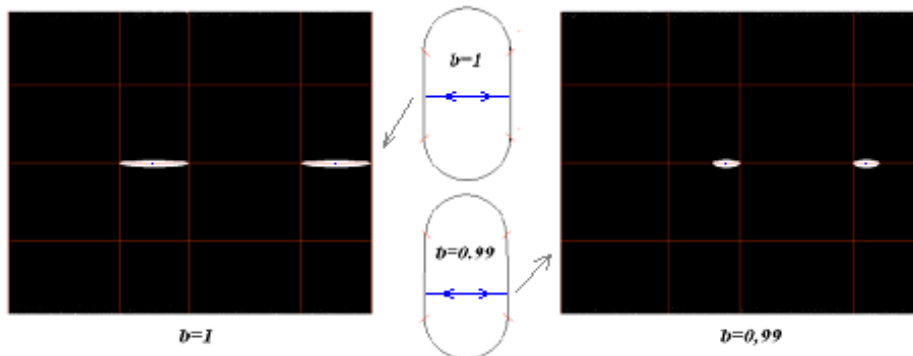
A kiértékelő funkciókkal bővített szimulációs program így gyors, pontos számolást és azonnali kiértékelést, illetve későbbi összehasonlítást tesz lehetővé. A $b=1$ esetre vonatkozó cikkek eredményeit és minden említett jelenségét a program igazolta, a leközölt ábrákat visszaadta. A kör-tök-stadion transzformáció vizsgálatához megfelelő, praktikus eszköz.

IV. Eredményeim

IV. 1. Érdekes, új tartomány

A Benettin-Strelcyn-féle átmenet általánosításaként kapott transzformáció egy jelenségekben gazdag, új tartomány vizsgálatát teszi lehetővé. A tipikus ($b < 1$) geometria a stadion esetétől lényegesen eltér. Először is a körnek végtelen sok szimmetriatengelye van. A négyzetre felhúzott ívekből álló elrendezésnek viszont már csak két tengelye van (a négyzet oldalfelezői). Amennyiben $b < 1$, a trapéz – és ezzel az átmeneti tők is – csak egy szimmetriatengellyel rendelkezik. Ez kihat a fázisportréra is.

A négyzet alapú geometriáknál ($b = 1$) a stadiontól a kör felé haladva a kiegyenesedő ívek lehetővé teszik egy elliptikus sziget kialakulását a 2 periódusú pálya körül. Ez a pálya a nagyobb sugarú ív közepe és a szemközti ív közepe között pattog oda-vissza. Ebben a geometriában ez az utolsóként eltűnő sziget a stadion felé, azaz az egyetlen sziget, ami elég nagy sugárárnynál elrontja az ergodicitást (lásd 20. ábra). A sziget – c növelésével – függőleges irányban egyre inkább összehúzódik a fázistérben, azaz az érintőre merőleges iránytól egyre kisebb mértékben eltérő pályák alkotják azt. Határesetben ez a sziget egy vonallá zsugorodik, ami kizárólag a majdnem egyenes íveken történő merőleges visszaverődést reprezentálja. Ez a jelenség b legkisebb változtatásával is megváltozik. A 2 periódusú sziget nemcsak a fázistér függőleges, hanem vízszintes irányában is összehúzódik. Ez praktikusán azt jelenti, hogy a sziget pályái nemcsak egyre kisebb szögeltéréssel rendelkeznek, de az ütközések a valós geometria egyre kisebb tartományán történnek. Ennek a magyarázata egyszerű: mindkét esetben a sziget közepét jelentő pálya olyan pontokban ütközik a fallal, ahol a szemközti érintők párhuzamosak. Ez a két pont – $b = 1$ mellett – sugárárnnytól függetlenül a majdnem egyenes ívek közepe. Ezzel szemben $b < 1$ esetén a sugárárnnytól függően a nagy ívek mentén, valamelyik szingularitás felé vándorolnak.



20. Ábra Ez a különbség a négyzet és a trapéz alapú geometriák között (az ábrán a sugárárnnyok megegyeznek). A fázisképeken a szigetek (kék) középpontjai a 2 periódusú pályák pontjai.

A másik fontos különbség, hogy $b = 1$ esetén a közepes ív (P4P1) maximálisan félkör lehet, ezzel szemben az átmeneti tőkben ($b < 1$) az nagyobb is lehet. Ezért érthető, hogy míg a stadionnál a sziget megszűnése csak határesetben történik meg (ami egyben az ergodicitás kialakulását is jelenti), addig $b < 1$ esetén ez már véges sugárárnny mellett megvalósul. Ezen sziget megszűnése, és a P4P1 ív félkörnél nagyobbra növekedése egy érdekes, jelenségekben gazdag, a Benettin-Strelcyn biliárdhoz képest új tartományt fed fel. A kérdéses tartomány b -vel 1-hez közelítve egyre nagyobb sugárárnny felett helyezkedik el. A továbbiakban ezen tartomány vizsgálatának tanulságait mutatom be.

IV. 2. Ergodicitás véges esetben

Először is igyekeztem ezt a tartományt feltérképezni, és a jellegzetességeket megkeresni. Az egyik legszembetűnőbb dolog az volt, hogy feltűnően sokszor adódott teljesen betöltött fázisportré, határesethez közeli geometriákra. Ez a fázisképek felbontása erejéig ergodicitást sejtet. Úgy vélem minden $b < 1$ -re létezik véges $c(b)$, amire minden (b, c) pár, ha $c > c(b)$, ergodikus geometriát határoz meg. Ez fontos különbség a stadionhoz képest, mert mint az előzményekből kitűnik, stadionban csak határesetben van ergodikus viselkedés, véges sugárány mellett mindig van integrálható komponens. A véges $c(b)$ sugárány fölötti ergodicitás feltételezését igyekszik alátámasztani számos szimulációs eredmény, heurisztikus érvelés és némi számítás.

A tapasztalat azt mutatja, hogy elég nagy sugárány (és $b < 1$) esetén a dinamika bizonyos értelemben tetszőlegesen közel van a $c = \infty$, azaz a tök dinamikájához. Pontosabban a tök-dinamikának ismert a következő tulajdonsága. Vegyük a fázispontok olyan halmazát, amelyek épp elhagyni készülnek a kicsi (P2P3), vagy a közepes (P4P1) ívet. Az első visszatérés leképezés erre a részhalmazra egyenletesen hiperbolikus. Elég nagy, véges c -re ez a részhalmaz szintén definiálható úgy, hogy a kis (vagy közepes) ívet épp elhagyó trajektóriát addig követjük, míg először vissza nem tér. Mivel az egyenletes hiperbolicitás nyílt tulajdonság, így az első visszatérés leképezés véges, de elég nagy c -re szintén egyenletesen hiperbolikus lesz. Másrészt vegyük észre, hogy elég nagy sugáránynál az ilyen pályák csak véges sokszor pattannak a majdnem egyenes íveken, kivéve, ha az érintővel elég kis szöget zárnak be. Ilyenkor ez a leképezés csak véges sok iteráltból fog állni. Ez a $b < 1$ eset különleges tulajdonsága. Hacsak az érintővel bezárt φ szög nem túl kicsi, az ilyen pályák C^1 értelemben tetszőlegesen közel vannak egy tök-trajektóriához. Összefoglalva: a tök dinamikai viselkedése jellemző a fázistér azon részére, ahol φ nem túl kicsi (pontosabban $\varphi > \varphi_{b,c}$, és $|\pi - \varphi| > \varphi_{b,c}$, ahol $\varphi_{b,c}$ tart a nullához, ha c tart a végtelenhez, minden $b < 1$ -re).

Ahhoz, hogy véges c -nél ergodikus viselkedést lássunk, meg kell vizsgálnunk, mi történik a kis (φ) szögű pályákkal. Ezek a trajektóriák legalább néhány ütközés erejéig a fal közelében maradnak, ezért „surranó-pályáknak” fogom őket hívni. Szimulációk alapján azt mondhatjuk, hogy elég nagy sugárány mellett ezek a pályák véges időn belül elhagyják a kisszögű, „surranó” tartományt. Tudjuk, hogy a φ egy íven való többszöri reflexió során állandó marad. Ezért a vizsgálat tárgyát az ívváltás közben történő változás képezi. Alapvetően kétféle ívváltást kell megérteni: a nagyobb ívről kisebb ívre, illetve kisebb ívről nagyobb ívre történő pattanást. A két eset geometriai megfontolásaira alapozom az alábbi, a „surranás” eltűnésére vonatkozó heurisztikus érvelésemet.

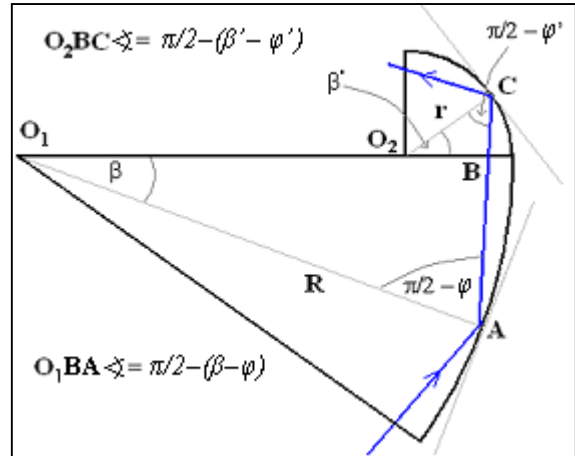
Először vizsgáljuk meg közelebbről a nagyobb ívről a kisebb ívre történő mozgást (lásd 20. ábra):

Jelöljük a nagy ívvel történő utolsó ütközés helyét A -val, a két ív találkozási pontjától mért szögtávolságát β -val (ahol $0 \leq \beta \leq 2\varphi$), és a pálya érintővel bezárt szögét φ -vel. Továbbá jelöljük B -vel a körívek O_1 és O_2 középpontjai által kijelölt egyenes és a trajektóriának a metszéspontját, C -vel pedig a kis ívvel történő első ütközés helyét. Az ívváltás utáni megfelelő koordináták legyenek rendre β' és φ' . Használok még az $a = O_2B$ segédváltozót is.

Írjunk fel egy-egy sinus-tételt az O_1AB háromszög két szögére: a $\pi/2-\varphi$ és a $\pi/2-(\beta-\varphi)$ szögekre, ill. az O_2BC háromszög $\pi/2-\varphi'$ és $\pi/2-(\beta'-\varphi')$ szögeire. Így kapjuk a következő egyenletrendszer:

$$\frac{R-r+a}{R} = \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{\cos(\varphi')}{\cos(\beta'-\varphi')}$$



21. Ábra Az ívváltás vázlat

Kihasználva, hogy $\pi/2-(\beta-\varphi)$ és $\pi/2-(\beta'-\varphi')$ kiegészítő szögek, ezért sinusuk megegyezik, továbbá összevonva és rendezve:

$$\frac{r}{R} \cos(\varphi') + \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cos(\beta - \varphi) = \cos(\varphi)$$

A $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ helyettesítés, és néhány egyszerűsítő lépés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\varphi'^2 = \left(\frac{R}{r} - 1\right) \cdot \beta \cdot (2\varphi - \beta) + \varphi^2$$

Amennyiben a sugárarány nagy, azaz $c \rightarrow \infty$, R/r mellett az l elhanyagolható, így a következő egyenletet kapjuk, ami φ' -nek φ -től való függése:

$$\varphi'^2 = \frac{R}{r} \cdot \beta \cdot (2\varphi - \beta) + \varphi^2$$

Mivel $0 \leq \beta < 2\varphi$, a zárójelben lévő mennyiség pozitív, ezért a nagyobb ívről a kisebbre váltásnál $\varphi \leq \varphi'$. Amennyiben a nagy íven történő utolsó pattanás nem éppen az ívek érintkezési pontjánál történik ($\beta \neq 0$), a növekmény a sugárarányal arányos, tehát φ jelentős mértékben megnő.

A kis ívről a nagyra történő mozgást hasonló gondolatmenet alapján közelíthetjük meg. Most a pálya ívváltás utáni paramétereit két vesszővel jelölöm. Az első lépéseket átgorva és kicsit másképp rendezve, φ'' -re ezt kapjuk:

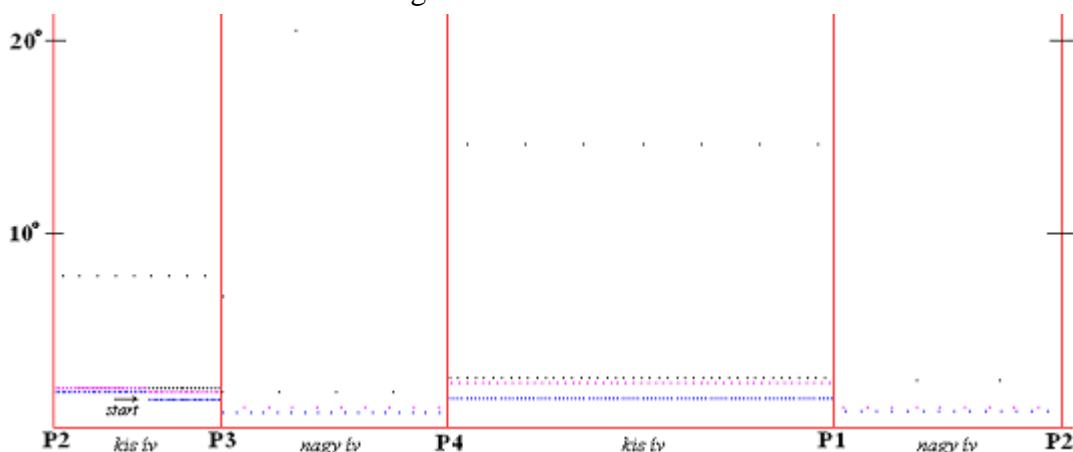
$$\varphi''^2 = \varphi^2 - \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \beta \cdot (2\varphi - \beta)$$

Amennyiben a c elég nagy, az r/R elhanyagolható, így kapjuk a kis ívről a nagyra váltás során történő szögváltozást:

$$\varphi''^2 = \varphi^2 - \beta \cdot (2\varphi - \beta)$$

Mivel $0 \leq \beta < 2\varphi$, a zárójelben lévő mennyiség pozitív, azaz a nagyobb ívről a kisebbre történő váltásnál $\varphi \geq \varphi''$. Ha $\beta \neq 0$, akkor ez mindenképp csökkenést jelent.

Tehát a nagy \rightarrow kicsi váltásnál a trajektória és az ütközési pontban húzott érintő által bezárt szög nagy valószínűséggel a sugáránytól függő mértékben nő, míg kis \rightarrow nagy váltásnál ez a szög a sugáránytól függetlenül valószínűleg csökken. Vegyük viszont észre, hogy ez a csökkenés a sugáránytól független, míg a növekmény mértéke a sugáráránnyal arányosan egyre nagyobb. Összességében – a két effektus versenyét tekintve – a növekedés mindenképp lekörözi a csökkenést. Az általam vizsgált tökhöz közeli tartományban, ahol c elég nagy, ez viszonylag gyorsan történik. Számolásaimat szimulációs eredmények is igazolják (pl. 22. ábra). Az ábra megértéséhez azonban szükséges tudni, hogy (1) a tökhöz közeli geometriákban a nagy ívek nyílásszöge a sugáráránynak megfelelően kisebb, mint a kis íveké; (2) az ábra vízszintes tengelyén nem a fentebb használt β koordináta, hanem az ívhossz szerepel, ami az előbbinek az aktuális ív sugarával vett szorzata.

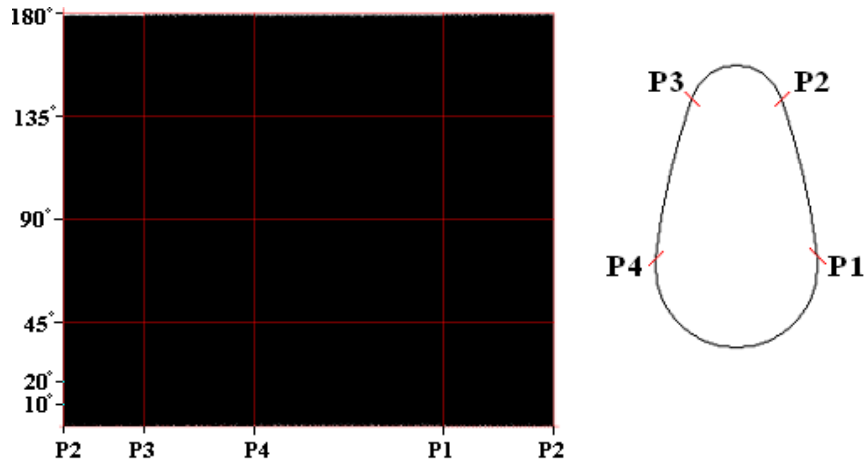


22. ábra A különböző színek mind ugyanannak a trajektóriának egymást követő szakaszait ábrázolják. A pálya érintővel bezárt szöge kezdetben 1° volt (a geometria $b=0,56$; $c=10$). A vízszintes tengelyen a kerületi paraméter látható, ami az íveken mért távolság, azaz ívhossz, és nem közvetlenül a β szög.

Az ábrán is látszik, hogy egy tipikus surranó-pálya szöge a kis ívről nagy ívre történő váltás során korlátos mértékben csökken, ugyanakkor kevesebbet is fog pattanni az adott nagy íven, mint előzőleg a kicsin (a nyílásszögek arányának megfelelően). Majd nagy ívről kis ívre váltásnál a szög jelentős mértékben megnő, ezért egységnyi nyílásszögre kevesebb pattanás jut. Megtévesztő lehet, hogy a kis íven összességében több pattanást látunk, mint előzőleg a nagyon. Ennek magyarázata, hogy a kis ív nyílásszöge lényegesen nagyobb, mint a nagy ívé. Ezután a pálya újabb nagy ívre tér át, ami újabb (korlátos mértékű) szögcsökkenéssel jár.

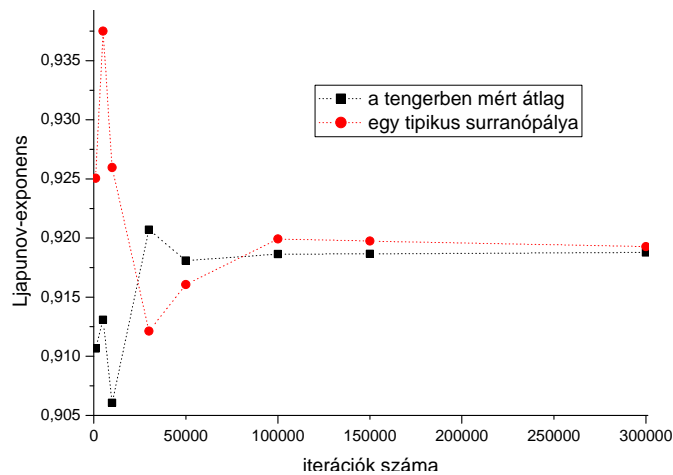
A két átmenet hatásának különbsége először akkor tűnik szembe, mikor a pálya először ér a kiindulási helyének közelébe. Ezt a különbséget jól érzékeltetik a kapott szögek a 22. ábra P4P1 szakaszán, ahol az első és a negyedik áthaladás lényegesen eltérő szögekkel történik.

Az alábbi ábrán pedig a fázisportré látható, ugyanannál a geometriánál, mint amit a 22. ábra elkészítésénél használtam, illetve a hozzá tartozó geometria vázlata. Látható, hogy a biliárd még viszonylag távol van a tők határesetétől, viszont a fázisteret már a trajektória bejárja (az előző ábra pályáját folytattam 30 millió iterációs lépéssel, ez látható alább).



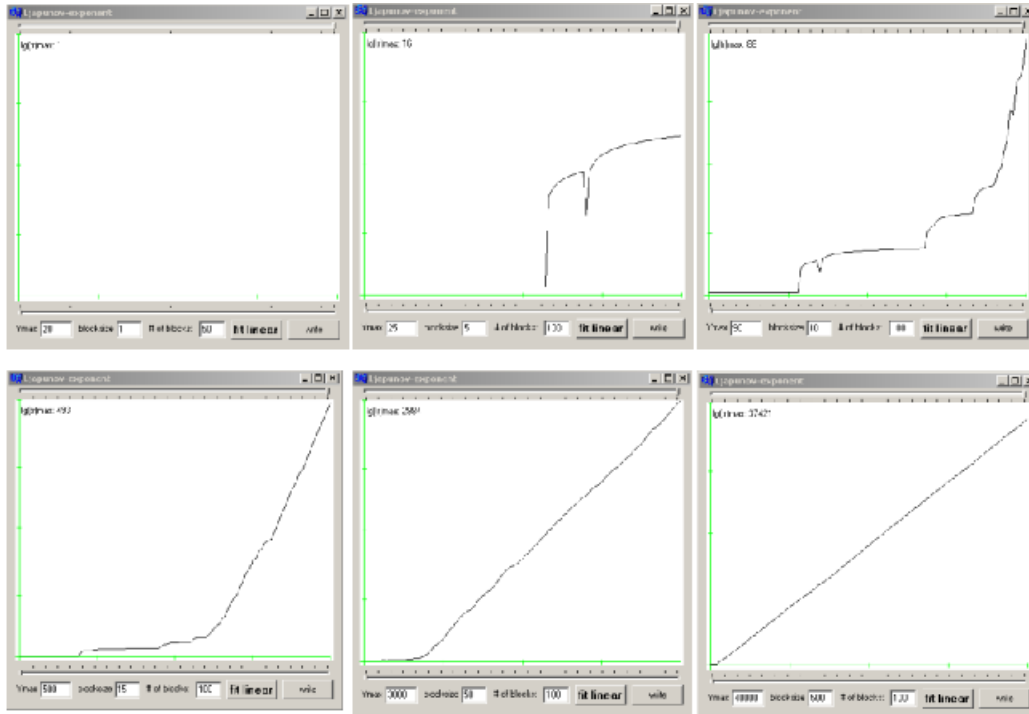
23. ábra Fázisportré és a geometria vázlata $b=0,56$; $c=10$

Azt, hogy a surranó-pályák nem rontják el az ergodicitást, egy további eredmény is alátámasztja. Adott geometriánál vizsgáltam a kaotikus tengerből indított pályák és egy-egy surranó-pálya Ljapunov-exponensét különböző hosszúságú trajektóriák esetén. Méréseim eredményét, a tengerből véletlenszerűen indított öt pálya exponenseinek átlagát és egy surranópálya exponensét ábrázolja a 24. ábra. Az iterációk számának növelésével ezek a mérőszámok egyre közelebb kerültek egymáshoz. Látható, hogy a rövidebb pályáknál mért értékek eléggé eltérnek a tipikus és a surranópályák esetén. A különbség az iteráció-szám növelésével rohamosan csökken. További tanulság, hogy 50000 iterációnál már a relatív különbség nem haladja meg a 0,5%-ot, ami a tipikus pályák adatainak szórása, ekkora iteráció-szám mellett. A Ljapunov-exponens alapján tehát már néhány tízezer lépés után nem különböztethetőek meg a surranópályák a többi trajektóriától.



24. ábra A tipikus- és a surranópálya Ljapunov-exponense (hasonló ábráimon a színes pontok a mért pontok, az őket összekötő vonalak pedig csak szemléltetési célt szolgálnak)

A meredekségek közti különbség csökkenése érthetővé válik, ha belegondolunk, hogy mi is történik. A surranópályák eleinte kis szöggel verődnek vissza. Ez a szög felnövekszik és a pálya kezdi bejárni a teljes fázisteret. Tehát a pálya kezdeti, alacsonyszögű szakaszát leszámítva a trajektória nem is igazán surranópálya. Ez azt jelenti, hogy a mátrixnyom növekedésében a kezdeti, tranzienst szakasz járuléka a lépésszám növelésével egyre csökken. Ezt érzékelteti a következő ábra.



25. ábra Különböző hosszúságú, azonos kezdeti feltételű surranópályák mátrixnyomainak logaritmusa. A pályák hossza rendre: 50, 500, 1000, 1500, 5000, 50000 iterációs lépés, a függőleges tengelyen felvett maximális értékek sorra: 1, 16, 88, 493, 2984, 37421

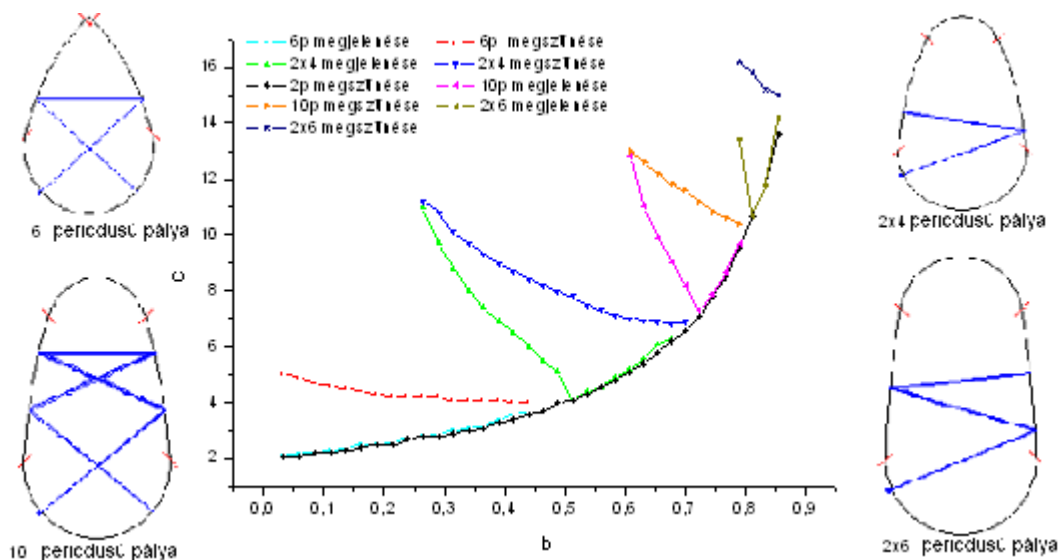
A heurisztikus érvelés és a szimulációs eredmények alapján bátran kijelenthető, hogy nagy sugárrány mellett a surranás nem rontja el az ergodicitást.

IV. 3. Egyszerű szigetsors

A kettőperiódusú pálya megszűnése, és a P4P1 ív félkörnél nagyobbra növekedése utáni tartományt tovább vizsgálva, több hasonlóságot vettem észre a szigetek viselkedésében, a két paraméter függvényében. Belátható, hogy a szigetek egy-egy periodikus pálya körül jönnek létre. Viszont nem minden periodikus pálya körül alakul ki sziget. Mindez erősen összefügg a pálya stabilitásával. Az alábbiakban az erre vonatkozó szabályszerűségeket vizsgálom.

A (b,c) tér több (összesen mintegy 5 ezer) pontjában 10 millió pontból álló fázisképeket készítettem, ugyanazokkal a kezdeti feltételekkel, mintegy feltérképezve a teljes paraméterteret. Az általános geometriákhoz tartozó fázisportré bonyolult, számos szigetet és akár több kaotikus tengert is tartalmaz. Ha viszont a P4P1 ív félkörnél nagyobb, a fázisportré mindig csak egy kaotikus tengerből és a benne lévő kevés szigetből áll. A (b,c) paramétertér ezen tartománya praktikusnak bizonyult a szigetek kialakulásához szükséges körülmények megfigyelésére.

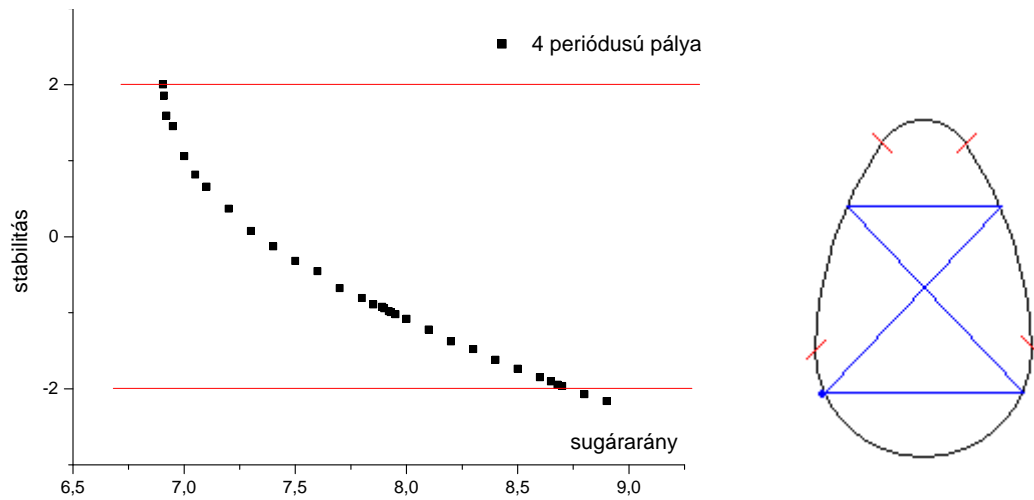
Egy-egy sziget méret- és alakbeli változását vizsgáltam b , és c függvényében. Adott b mellett c -t növelve, általában a sziget mérete nőtt is meg csökkent is. Hasonló a viselkedés adott c mellett b -t változtatva. Fontos megjegyezni, hogy több különböző típusú pályának lehet egyező periódusa, ezért a körülöttük kialakuló szigetek különbözőképp fejlődhetnek. Az alábbi ábrán pl. 2-féle 6 periódusú pálya képe is látható, a kettő között az a különbség, hogy az egyiknek a valós térben vett tükörképe is hat periódusú pálya (ezért „2x6” periódusú), míg a másiknak valódi tükörképe önmaga. Feljegyeztem, hogy az egyes szigetek milyen paraméter-pároknál jelennek meg, vagy tűnnek el. Ezek az adatok grafikonon megjelenítve láthatók alább, a nagyobb szigetekre.



26. ábra A nagyobb szigetek megjelenése és eltűnése b és c függvényében, és az azok középpontjául szolgáló pályák vázlata

A méretbeli ingadozás és a megjelenés/eltűnés jelenségeinek megértését a már korábban említett stabilitás-számoló algoritmus segítette elő. Méréseket végeztem a szigetek közepét adó periodikus pálya stabilitására vonatkozóan mind b , mind c függvényében. Egy konkrét sziget stabilitási tulajdonságait mutatja be a 27. ábra, melyen a ± 2 értékek a stabil és instabil jelleget választják külön. Tapasztalataim azt

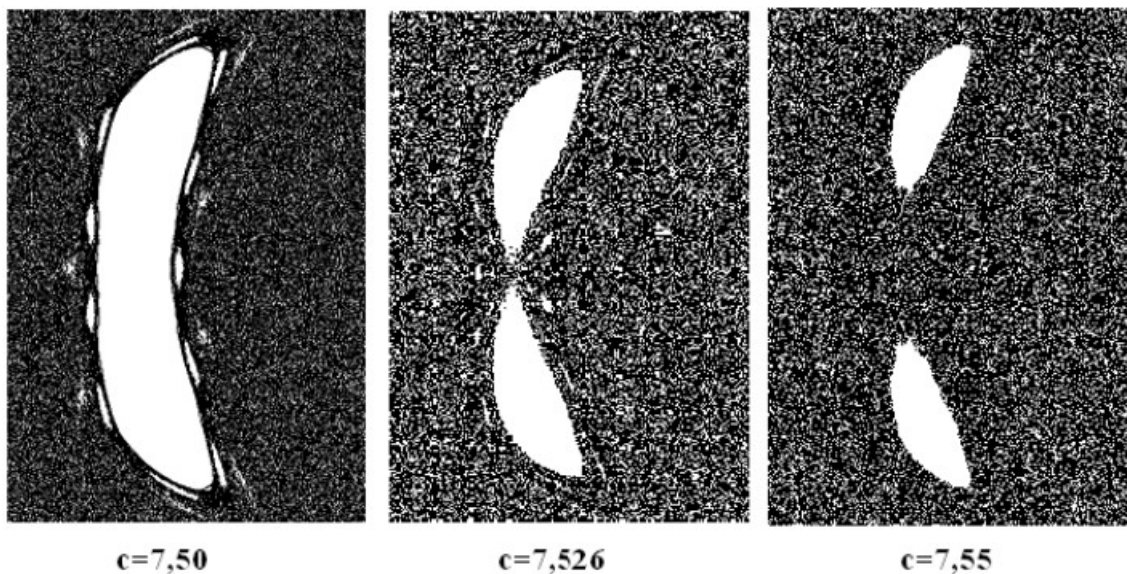
mutatják, hogy a sziget kialakulásához nem elég, hogy létezzen egy periodikus pálya, hanem annak stabilitása is szükséges. Amennyiben a záródó trajektória instabil, nem alakul ki körülötte sziget.



27. ábra A 4 periódusú sziget közepét adó periodikus pálya stabilitásának változása és a trajektória vázlata. A sziget csak a piros vonalak által határolt, stabil tartományban létezik.

Az ábrán látható, hogy a sziget közepét adó periodikus pálya stabilitását még a sziget megszűnése után is lehet ellenőrizni. Tehát a pálya még mindig létezik, viszont instabilitása miatt már nem található körülötte integrálható tartomány. A sziget ilyen jellegű megszűnése/születése tehát a periodikus pálya stabilitására vezethető vissza.

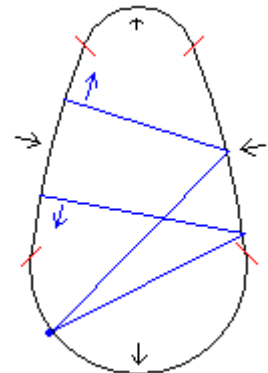
A szigetek többféleképpen szűnhetnek meg, illetve szülehetnek. A fázisképen nemcsak egyszerűen megjelenhetnek/eltűnhetnek, hanem össze is olvadhatnak több szigetből, és szétszakadhatnak más szigetekké. Ilyen irányú tapasztalataimat egy konkrét sziget fejlődésén keresztül mutatom be (28-32.ábrák). Ahhoz, hogy tisztábban láthassunk, a sziget periódusának többszöröse alatt záródó pályák stabilitását volt érdemes nyomon követni. A méréseket tehát azzal egészítettem ki, hogy összeolvadás előtti szigetek közepének, illetve az összeolvadt sziget közepének stabilitását egyszerre vizsgáltam. Ez praktikusán azt jelenti, hogy numerikusan, vagy a vázlat segítségével minden mérésnél meg kell keresni ezeket a pályákat, mert a szétszakadt szigetek nem



28. ábra A szétszakadást elvékonyodás előzi meg

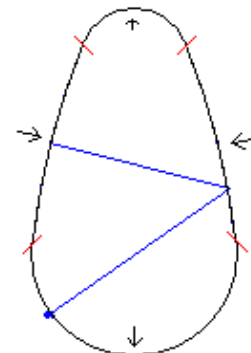
tartalmazzák az összeolvadt sziget közepét, illetve az összeolvadt szigeteknek nem jellegzetes pontja a szétszakadás utáni szigetek középpontja. Egy tipikus szétszakadást mutat be a 28. ábra, ahol nem a sziget belső szerkezetét ábrázoltam, hanem a körülötte lévő kaotikus tengert.

A szétszakadt szigetek közepét adó pálya periódusa az összeolvadt sziget periódusának többszöröse (a 29. ábra esetében duplája). Ez a sziget viszont már a pálya geometriai ellehetetlenülése miatt szűnik meg. A 29. ábrán a sziget közepéhez tartozó trajektória megváltozását szemléltetem a sugárárány növelésével. A nagy ívek egyenesedni kezdenek, míg a kisebb ívek sugara nő. Jól látszik, hogy a pálya érzékeny a sugárárány változásaira, előbb-utóbb eléri az egyik szingularitást, és azon áthaladva már másképpen fog visszaverődni. Így legalábbis nem ugyanannyi pattanás után fog visszatérni a kiinduló pozícióba, az addigi periodikus pálya mindenképp átalakul. Különböző típusú periodikus pályák különbözőképp érzékenyek a geometriai paraméterek változására, de egy közös tulajdonságuk mindenképp van: minél nagyobb a periódusuk, annál érzékenyebbek, annál kisebb (b,c) tartományban létezhetnek. A sziget ilyen megszűnését geometriai megszűnésnek nevezem, mert a sziget közepét adó periodikus pálya, még akkor is ha stabil lenne, geometriai okokból szűnik meg, ezáltal a szigetet is eltűntetve.



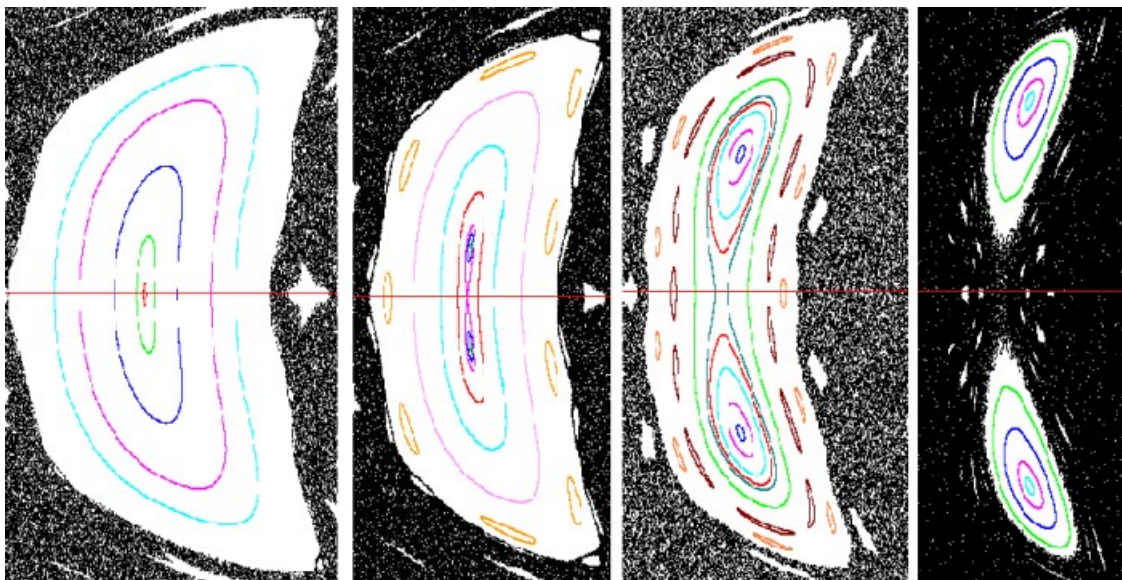
29. ábra A periodikus pálya megváltozása c növelésére

A szétszakadás folyamata a következő: A sugárárány növelésével a periodikus pálya kis perturbációi, jellemzően többszörös periódusú pályák is stabilá válnak, amelyek a c növelésére viszont másként reagálnak, mint az eredeti pálya. A 29. ábrán szereplő pálya például a 30. ábra pályájának kis perturbációja (sőt infinitezimálisan kicsi perturbáció esetén a megfelelő ütközések helyei gyakorlatilag egybeesnek), ami viszont c növelésére csak a stabilitását veszíti el, geometriája lényegében változatlan marad. Tehát a szigeten belül a középpont több pontra esik szét, amelyek a sugárárány növelésével távolodni kezdenek az eredeti középponttól, ami ezzel párhuzamosan elveszíti a stabilitását (a sziget ilyen jellegű vizsgálatáról a 32. ábra számol be). Ez a jelenség az irodalomból ismert, a logisztikus-leképezésnél [12], vagy standard leképezésnél [12] tapasztalt perióduskettőződésre, azonban itt a szingularitások erősen befolyásolják a többszörös periódusú pályák változásait. Elképzelhető azonban, hogy egy hasonló, de diszkontinuitásoktól mentes geometriában periódus-sokszorozódások sorozatát tapasztalhatnánk. Bár erről az Hénon-Wisdom cikk nem ír részletesen, mostmár látható, hogyan befolyásolják a szingularitások a szigetek sorsát.



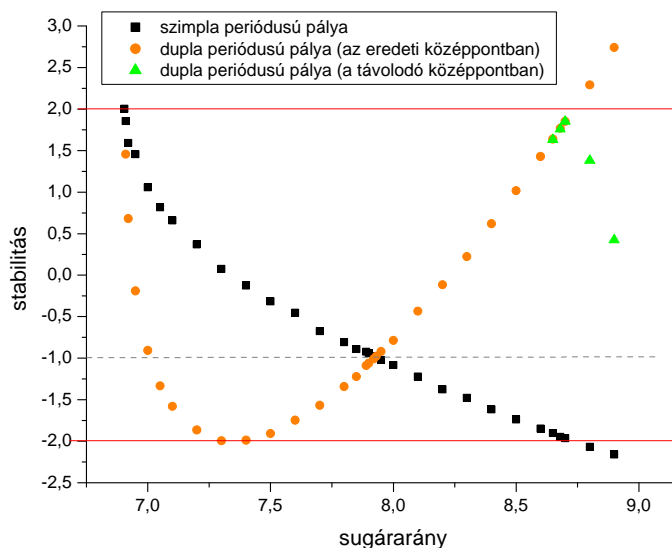
30. ábra A pálya érzéketlen c növelésére

Ahhoz, hogy a sziget teljesen szétszakadjon, az új középpontok eltávolodása még nem elég. A szétszakadásnak stabilitási okai is vannak. A belső szerkezet változásainak vizsgálata világított rá, hogy a szigeten belül fokozatos átalakulás megy végbe. Az eredeti középpont instabillá válása még nem szünteti meg a régi, koncentrikus belső szerkezetet, csak a középpont környezete alakul át. A szétszakadás az eredeti struktúra megszűnése után következik be. A belső szerkezet változásáról a 31. ábra számol be.



31. ábra A sziget elvékonyodása a régi szerkezet fokozatos eltűnését jelenti

A sziget stabilitási viszonyait az alábbi ábra mutatja be. Látható, hogy az új, stabil középpontok és az eredeti középpont stabilitása ellentétes irányban változik, amint a távolodás elkezdődik.



32. ábra A sziget periodikus pályáinak stabilitása a sugárárány függvényében, adott b mellett

A szigetek méretének változásában van egy nehezen interpretálható jelenség. Bizonyos (b,c) paraméter-pároknál az adott sziget mérete, a közeli geometriákhoz képest drasztikusan csökken. A jelenség általános, számos szigetnél megfigyelhető. Tapasztalataim alapján mindig a sziget közepének $s=-1$ stabilitási értékénél történik. Mégsem nyilvánvaló, hogy miért zsugorodik le hirtelen. (Nem kizárt, hogy a forgatási szám irracionálisával összefüggésbe hozható a jelenség. A kérdést nem vizsgáltam közelebbről.)

IV. 4. Ljapunov-exponens mérése

Méréseket végeztem különböző geometriák mellett, hogy néhány hasonlóságot és markáns különbséget vehessek észre. Ezeknek a méréseknek további célja a megfigyeléseim, és azok magyarázatának alátámasztása volt.

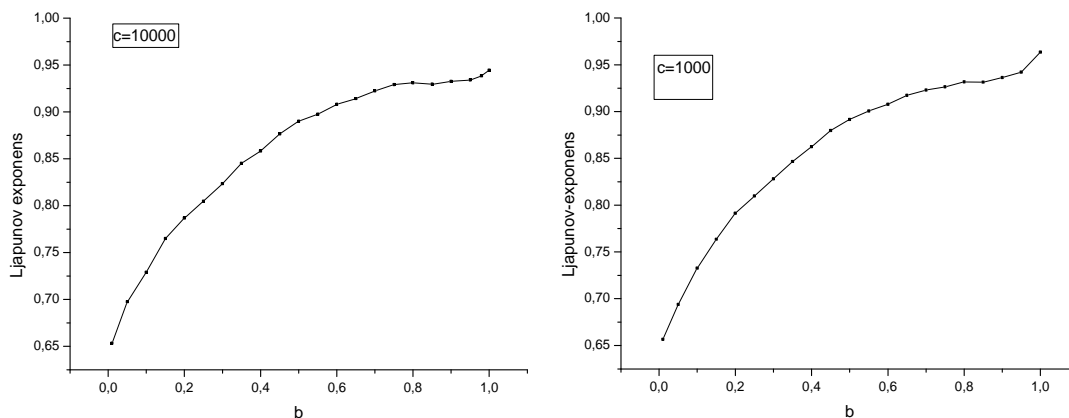
A Ljapunov-exponens első tulajdonsága: elliptikus, azaz stabil periodikus pályákon mérve zérus. Ezt – bár feleslegesnek tűnik – méréseim is igazolták.

A második tulajdonsága már tovább mutat: nem periodikus pályákon mérve pozitív. Méréseket végeztem különböző hosszúságú nem-periodikus trajektóriákon, és arra a megállapításra jutottam, hogy néhány tízezer lépés bőven elegendő egy-egy meredekség kellő pontosságú meghatározásához. A kezdeti tranziens jelenségeket kiküszöbölendő különböző geometriáknál két-két egymáshoz nagyon közeli pontból indítva figyeltem a lépésszám növelésével a mátrixok nyomának növekedését. Párszáz lépéses skálán nemcsak a növekmények szórtak szembetűnő módon, de a két meredekség is lényegesen különbözött. Az iterációk számát növelve mind az adatok, mind a meredekségek szórása csökkent. A kritikus lépésszám fölött ez már sokkal kevésbé változott, viszont a méréseimet egyre inkább lelassította. Tehát a programomban a Ljapunov-exponens vizsgálatánál alapértelmezett trajektória-hossznak 50000-et határoztam meg (500 lépéses blokkokban, lásd III.2. fejezet, 17. oldal) és méréseimet is ilyen lépésszám mellett végeztem. Persze a programban lehetőség van ennek növelésére is.

A második tulajdonság segítségével a nem-periodikus pályák bizonyos értelemben csoportosíthatóak. Ebből adódik, hogy a Ljapunov-exponens adott ergodikus komponensre jellemző. Vizsgálataim során azt a kérdést tettem fel, hogy vajon ez mennyire látszik, különböző kezdeti feltételekkel indított pályákat milyen hosszan kell követni, hogy a mátrixának nyoma azonos meredekséggel nőjön, azaz egy-egy rövid trajektória mennyire jellemző az adott komponensre.

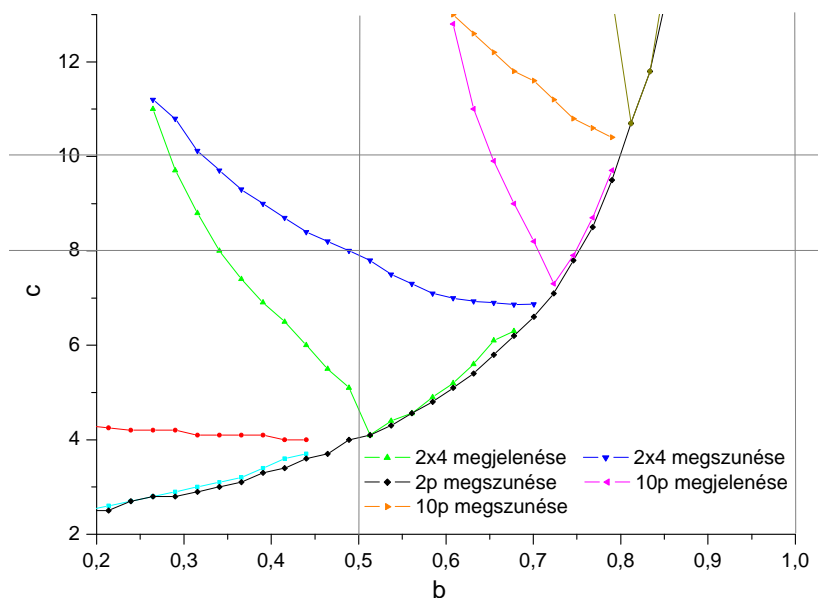
A tanulság az, hogy a mátrixok nyomának logaritmusai még a legjobb esetben is – ha minimális mértékben is, de – szór, nem illeszkedik pontosan egy egyenesre. Ennek a szórásnak a következménye, hogy az egyenes-illesztés szintén tartalmazni fog egy bizonytalanságot. Tehát, ha különböző pontokból indított trajektóriák adatainak meredekségeit átlagoljuk és az átlagot vesszük az ergodikus komponensre jellemző mérőszámunk, akkor az adatokra történő illesztés 1-2%-os hibáján belül maradnak a komponens trajektóriáinak exponensei.

Különböző b paraméterű geometriák esetén, azonosan nagy sugárány mellett vizsgáltam tovább a Ljapunov-exponens változását. A 33. ábrán látható, hogy a Ljapunov-exponens érzékeny a geometriai paraméterekre, még akkor is, ha csak ergodikus esetekre szorítkozunk. Viszont a paraméterfüggés jellege a sugárány növelésével nem változik. A grafikonokon, $b=1$ közelében látható törést a jelen lévő kis méretű 2 periódusú sziget hatásának tulajdonítom. Egyrészt a $b=1$ kis környezetét leszámítva ekkora sugárányok mellett nincsenek szigetek a fázisportrén. Másrészt a számos mérés igazolja, hogy szigetek jelenléte befolyásolja a mért meredekséget.



33. ábra Teljesen ergodikus (kivéve $b=1$ közelében) geometriák Ljapunov-exponense

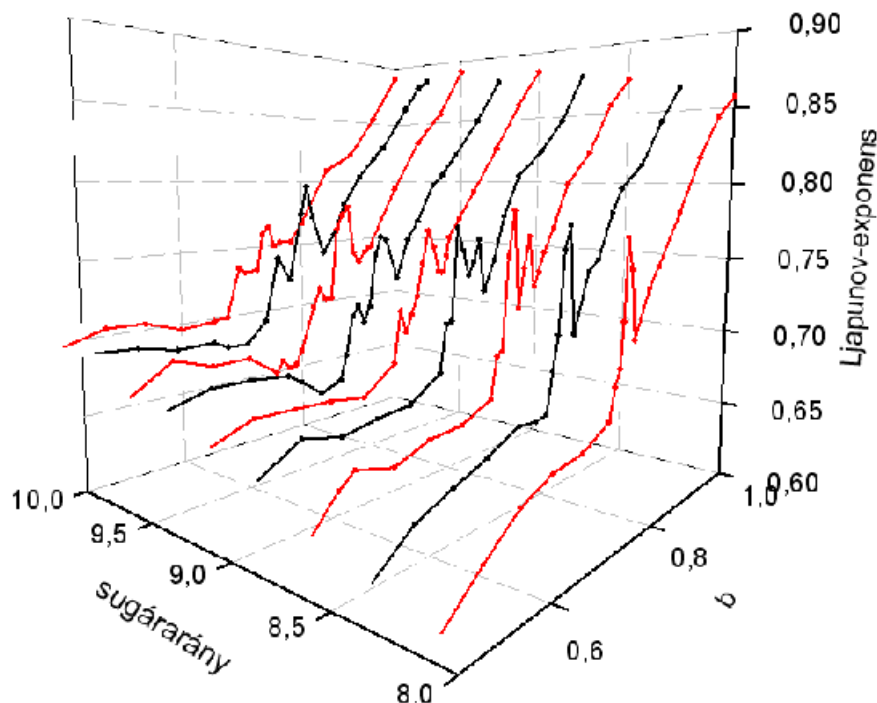
Végeztem méréseket olyan geometriáknál is, ahol néhány sziget is jelen van, hogy azok hatását jobban megfigyelhessem. Ehhez olyan geometriákat használtam, ahol csak egy periodikus pályához tartozó sziget rontja el az ergodicitást. Az ilyen sziget változását kísértem figyelemmel, míg a körülötte lévő kaotikus tengerben Ljapunov-exponenst mértem. A 35. ábra elkészítéséhez a 34. ábrán a szürke vonalak által határolt (b,c) térben vettem fel néhány metszetet.



34. ábra A 35. ábrán látható terület a (b,c) térben, és benne a 10 periódusú sziget elhelyezkedése

A következő ábra pedig a szigetek körüli tengerben mért Ljapunov-exponens változásáról számol be. A $b=0,5$ közelében látható exponensek olyan geometriákra vonatkoznak, ahol nincsenek szigetek. Érthető módon fix b mellett a sugárárány növelésével a mért meredekségek nőnek a sziget nélküli (b,c) párok esetén. Viszont sziget megjelenésével jelentősen megváltozik a kép. Amikor $c=8$ és $b>0,7$ – érdemes az előző ábrával összevetni – a fázisképen a 10 periódusú pályához tartozó szigetek jelennek meg. Ez a mért exponens függésében egy törést okoz. A szigetek elkezdnek növekedni, később összeolvadnak, közben a mért meredekség növekszik. Majd az összeolvadt sziget több részre esik szét, de a 10 periódusú szigetek megmaradnak. Méretük viszont folyamatosan csökken. Az összeolvadt sziget szétesése okozza a

letörést. A b -t tovább növelve, miközben a 10 periódusú szigetek mérete folyamatosan csökken, a 2 periódusú pálya stabilá válik, körülötte újabb sziget alakul ki. Ez $b=0,75$ -nél egy újabb törést okoz a paraméterfüggésben. A 2 periódusú szigetek mérete a mért exponenssel együtt növekszik (ez a sugárány növelésével történő méretnövekedésre is igaz). Tehát a jelen lévő szigetek mérete alapvetően befolyásolja a mért meredekséget.

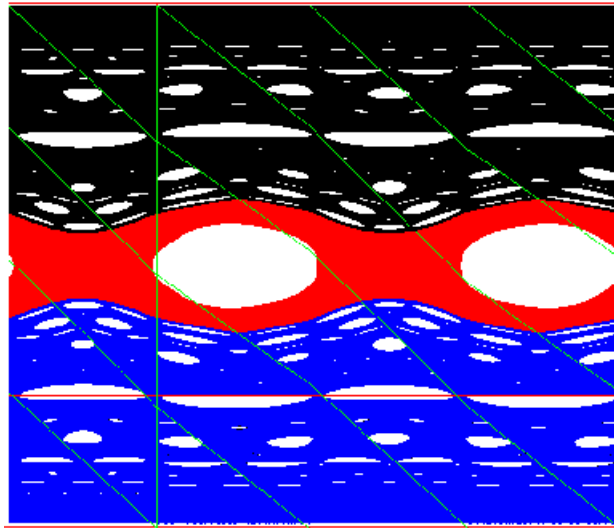


35. ábra A szigetméret alapvetően befolyásolja a mért meredekséget

Kicsit pontosabban fogalmazva: minél nagyobb területet takar ki a fázistérből egy szigetcsoport, annál nagyobb ütemű növekedést fogunk tapasztalni az őket körülvevő tengerből indított pályák mátrixának nyomában. Mivel a Ljapunov-exponens két közeli pálya eltávolodásának ütemét jellemzi, sziget jelenlétében két kezdetben közeli pálya gyorsabban távolodik el egymástól, mint sziget nélküli esetben. Még nem teljesen világos, milyen mechanizmus miatt mérünk ilyenkor nagyobb exponenst. Nem kizárt, hogy a szigetek kis környezetében kvázi-integrálható viselkedés alakul ki, melynek járuléka a sziget méretétől, vagy akár a sziget környezetének elhelyezkedésétől (kis, vagy nagy szögtartomány) függ. Azonban ennek tisztázása, illetve a mechanizmus megértése további vizsgálatokat igényel.

IV. 5. Tengersizválás

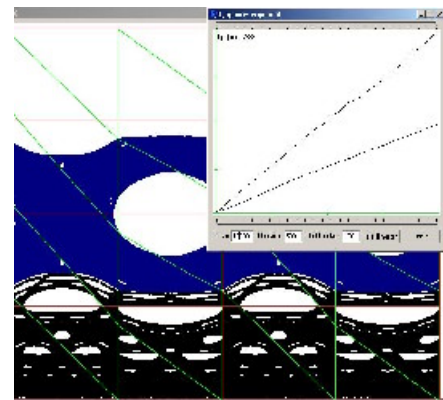
Benettin és Strelcyn cikkében [3] írja, hogy a stadiont a kör felé transzformálva a szigeteket eleinte egyetlen kaotikus tenger veszi körül. Később ez az egyetlen komponens két, majd több részre válik szét. Az általuk közölt δ értékeknél én is tengersizválást tapasztaltam, sőt a szétválások helyét keresve és δ -ra átszámítva, egzaktul ugyanazokat a paraméterértékeket kaptam, mint ők. Természetesen nem feltétlenül szerencsés kimondani a tengersizválását, hiszen ez megkövetelné, hogy az egyik tengerből indított trajektóriák soha ne hagyhassák el azt. Ezt azonban csak véges számú trajektóriánál és véges számú pattanásnál tudjuk ellenőrizni.



36. ábra Tengersizválás $b=0,95$, $c=1,15$ -nél. A grafikon kék és fekete komponensei egymás ellentétei, pontosabban a kék pályáit visszafelé követve kaphatjuk a fekete pontjait.

A tengersizválások helyét immár bővebb tartományban, a (b,c) paraméterterében keresve a következő megállapításokra jutottam. A Benettin-Strelcyn esethez közel, b kis változtatására a szétválás helye folytonos függést mutat. A $b=1$ esettől távolabb viszont érzékeny a geometriai paraméterek változtatására, és megfigyelése is problematikusává válik. Tapasztalataim alapján egyre szűkebb c tartományon belül történik a tengersiz ilyen jellegű szétválása, illetve egyre inkább ráhúzódik a kör esetre.

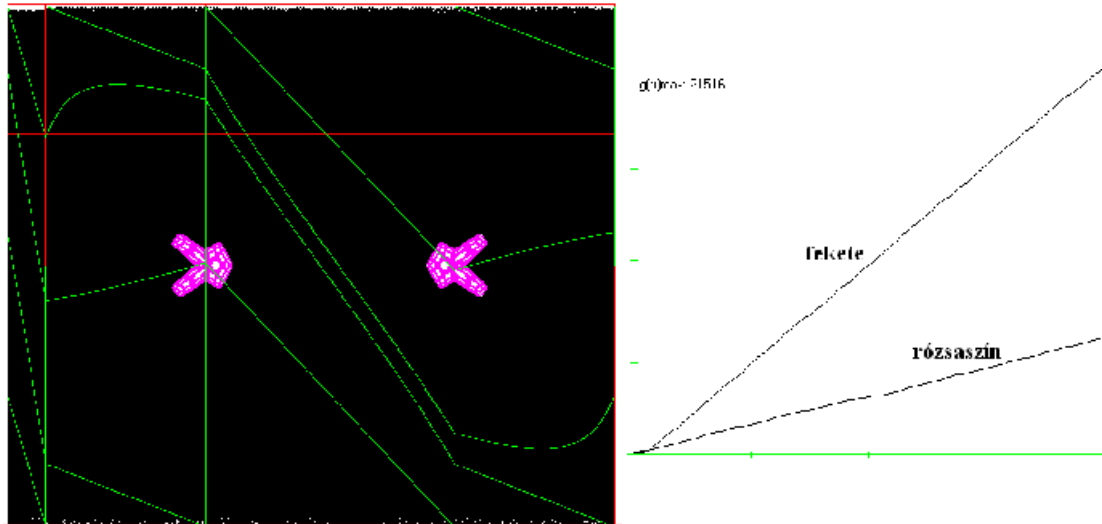
További vizsgálódásaimhoz a különböző komponensekben Ljapunov-exponenst mértem. Felmerült a kérdés, hogy olyan geometriáknál, ahol több ergodikus komponens is jelen van, vajon látszik-e különbség a Ljapunov-exponensben is. Több olyan megfigyelésem is volt, ahol különböző ergodikus komponensekben különböző meredekségeket tapasztaltam. Ezek közül egy látható a 37. ábrán. Általánosságban azonban kijelenthető, hogy ez a szabályszerűség nem igazolható egyértelműen. A mért mátrixnyomok nem mindig mutattak exponenciális növekedést, még hosszabb (10^5 - 10^6 iteráció) pályák esetén sem. Mivel ebben a tartományban elég sok sziget is jelen



37. ábra A külön ablakban lévő egyenesek a két különböző színű tengerből indított pályákhoz tartoznak ($b=1$, $c=1,35$)

van egy-egy tengerben, nem egyértelmű, hogy egy-egy különböző meredekség minek tulajdonítható.

Méréseim során azonban más jellegű tengerszétválásra is találtam példát. Ekkor egy-egy trajektória pontjai a vizsgált lépésszámig (3×10^6) nem lépnek át más ergodikus komponens fázisstartományába. Ezek az esetek a kör geometriától távolabb, viszonylag nagyobb c -knél történtek, azaz legalább az egyik komponensben kevés sziget van jelen. Ekkor a Ljapunov-exponens mérése egyértelműbb különbséget adott. Ez alapján kijelenthető, hogy az exponens körhöz közeli geometriákban tapasztalható bizonytalansága a szigetek jelenlétének hatása. Továbbá valószínű, hogy különböző ergodikus komponensekben, különböző meredekség mérhető.



38. ábra A baloldali grafikonon látható fekete és rózsaszín komponensek 40-40 millió iteráció pontjaiból állnak. A jobboldali grafikon a fekete és a rózsaszín komponensből indított pályák mátrixvomainak logaritmusát ábrázolja.

Hénon és Wisdom cikke [5] szerint a különböző ergodikus komponenseket transzverzális invariáns görbék választják el egymástól. Ezen a görbén fekszenek az úgynevezett kioltó-pályák pontjai is. Szimulációim alapján ezt az állítást sem megerősíteni, sem cáfolni nem tudom. Annyit viszont állíthatok, hogy találtam olyan jelenségcsaládot, ahol a tengereket legalábbis nem transzverzális görbék választják el egymástól.

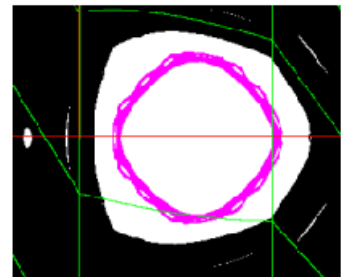
IV. 6. További érdekes jelenségek

A következő néhány jelenséget nem vizsgáltam közelebbről, ezért csak ismeretterjesztő jelleggel közlöm őket. A szimulációs program alkalmas ilyen irányú további kutatások elvégzésére, magyarázatok keresésére.

Az általam vizsgált tartományban (IV. 1-3. fejezetek) viszonylag kevés sziget van, sőt gyakran előfordul, hogy csak egyfajta szigetcsoport létezik adott geometriánál. A szigetek megszűnése és más szigetek keletkezése néha át sem fed. Tehát ergodicitást nem csak a IV. 2. fejezetben bemutatott, a határesethez közeli tartományban láthatunk. A kapott fázisképek alapján további, pozitív mértékű, köztes tartományokban is ergodikus viselkedés feltételezhető.

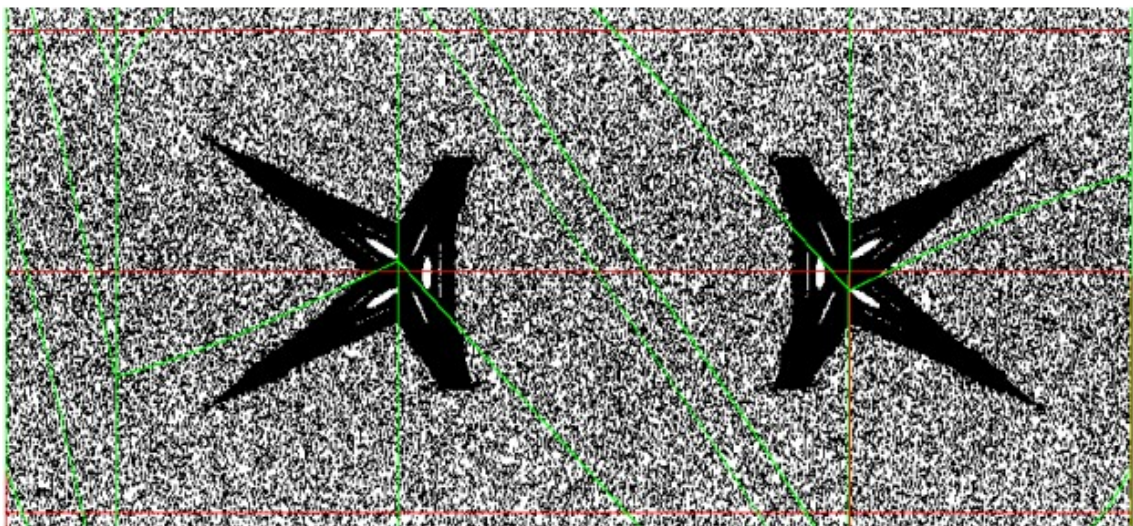
A 2 periódusú szigetek általában több szigetre bomlanak, amelyek mind egy-egy periodikus pálya körül alakulnak ki. Azaz a 2 periódusú stabil pálya nagyobb periódusú stabil pályává alakul át. A geometria alapja (általában trapéz), b minél közelebb van l -hez, annál nagyobb ez a periódus, és annál érzékenyebb c változtatására.

Előfordulhat, hogy egy-egy sziget olyan nagyra nő, hogy egyes részei átlépik a szingularitásokat. A sziget belső szerkezete ilyenkor átalakul. Azok a trajektóriák, amelyek átlépik a sarkokat, általában kaotikus sávot alkotnak (lásd 37. ábra, ahol a zöld vonal pontjai az egyik sarokba történő pattanást jelölik). Mindazonáltal minél kisebb mértékben lóg túl a szingularitásokon, annál kevesebb, és keskenyebb ilyen sávot tartalmaz a sziget. Bár ritka az ilyen szembeutó jelenség, minden olyan szigetben megfigyeltem, ami elég nagy, hogy ilyen pályákat is tartalmazzon.



39. ábra A sziget kevert belső szerkezetű is lehet

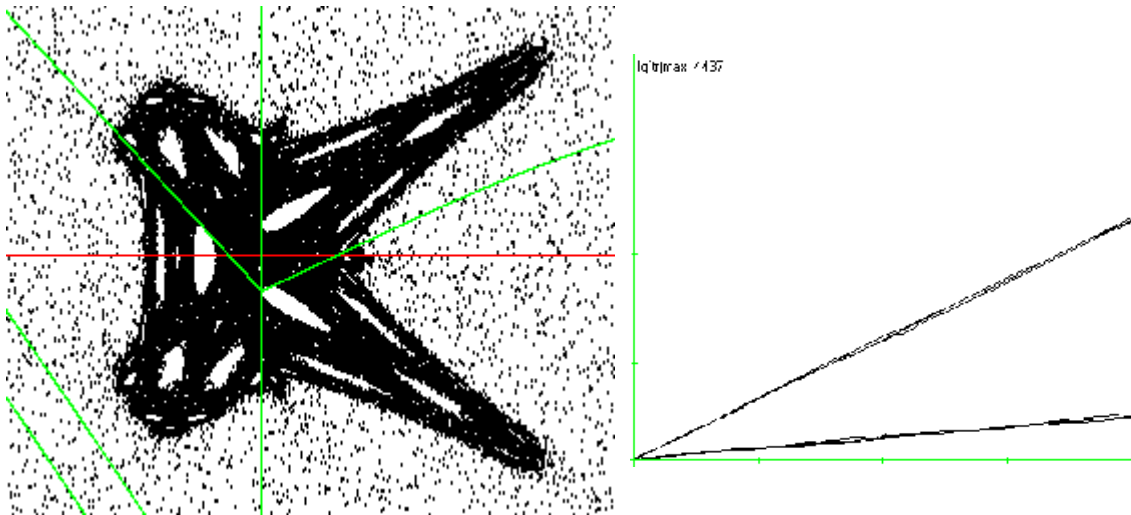
Bizonyos geometriáknál a fázistérnek létezik egy olyan tartománya, amiből indítva a trajektória nagyon hosszú ideig tartózkodik ebben a tartományban, mintha nehezen tudna kitörni belőle. Ha viszont a tartományon kívülről indítjuk a pályát, abba



40. ábra Csapda-jelenség: a trajektória lényegesen „sűrűbben” pattan a fázistér egy bizonyos tartományában, mint annak bármely más, ekkora területén (az ábra $5 \cdot 10^5$ pontból áll)

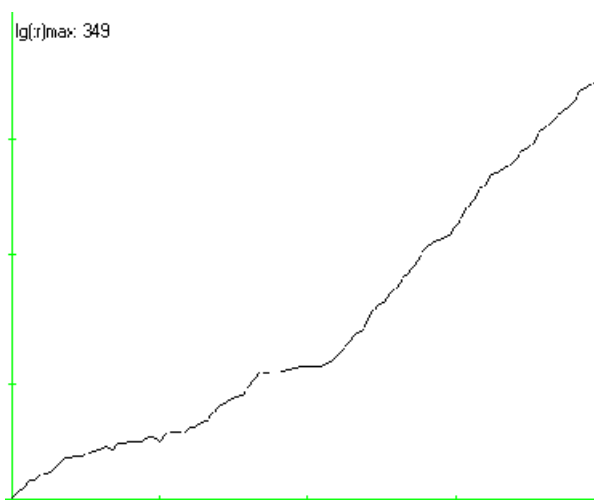
csak ritkán tör be. Ez a jelenség alapvetően szigetek környezetére jellemző. Viszonylag gyakori olyan geometriáknál, ahol a szigetek mérete hirtelen lecsökken, pontosabban olyan geometriáknál, amikben van egy sziget, ami egy nagyon közeli geometriában lényegesen nagyobb méretű volt.

Az ilyen „sűrűbb” tartományok Ljapunov-exponensét vizsgálva fontos különbséget vehetünk észre. A bennük mérhető exponens különbözik a tengerben mérhető meredekségtől (lásd 41. ábra).



41. ábra A baloldali fáziskép-részlet ($b=0,3$, $c=3,5$) néhány tízezer iterációt ábrázol. Jobboldalon a két komponensben mért mátrixnyomok logaritmusai láthatóak (mindkét komponensben több mérést végezve). A kevésbé meredeket mértem a „sűrűbb” tartományban

Tehát összeségében kijelenthető, hogy egy kaotikus tengerre nem feltétlenül egy Ljapunov-exponens jellemző. Egy tengerben lehet különböző a keverési sebesség. Ezért érthető, hogy több esetben is nem exponenciális növekedést tapasztaltam a mátrixok nyomában. Logaritmusuk nem lineárisan nőtt, hanem törött-vonalra emlékeztetett, mintha különböző meredekségű egyenes szakaszokból állt volna össze. Ez a különböző módon keverő tartományoknak köszönhető. Valószínűleg ez nehezíti meg a körhöz közeli, több kaotikus sávot tartalmazó fázisképekben a Ljapunov-exponens mérését. Ekkor egy-egy sávon belül is többféle exponens mérhető rövid pályák esetén, hosszabb pályáknál pedig igen összetett grafikont kapunk, aminek a meredekségét nem lenne jogos Ljapunov-exponensként kezelni (lásd 42. ábra).



42. ábra Nem exponenciális mátrixnyom növekedés

V. Összefoglalás

Diplomamunkámban a kevert fázistér tulajdonságait kutattam konvex biliárdokban. Ehhez egy olyan modellt hoztam létre, amely a témában publikált cikkek néhány eredményét határesetként tartalmazza, ugyanakkor általánosabb vizsgálatot tesz lehetővé. Ez a kétparaméteres család a Benettin-Strelcyn-féle kör-stadion átmenet általánosítása, ami egy olyan folytonosan transzformálható geometriát ad, amiben a biliárd dinamika a két paramétertől függően integrálható, kevert, vagy teljesen ergodikus lehet. Az általánosítás egy új, jelenségekben gazdag, jól vizsgálható tartományt is feltárt. Dolgozatomban alapvetően ennek a tartománynak a tanulmányozásával foglalkozom.

Először is egy jól használható, praktikus szimulációs környezetet fejlesztettem a vizsgálatokhoz, ami a publikált jelenségeket nagy pontossággal visszaadta. Programom nem csak az adott geometriához tartozó fázisportrék gyors és pontos szimulációját végzi, hanem azonnali kiértékelést is lehetővé teszi, bőséges eszköztárral. Többek között lehetőség van az irodalomban ismert vizsgálati módszerek azonnali alkalmazására és azok eredményeinek elmentésére és későbbi összehasonlítására is.

A vizsgálat fő célja volt, hogy a kevert fázistér változásának törvényszerűségeiről teljesebb képet kapjak. Szimulációim több újszerű jelenségre hívják fel a figyelmet, de ezek közül az ergodicitás kialakulásának körülményeire koncentráltam

Numerikus eredményeim és heurisztikus érvelésem alapján úgy vélem, ergodikus viselkedés tapasztalható a határesethez közeli pozitív mértékű tartományban. Amennyiben a visszapattanás szöge nem túl kicsi, a dinamika elég közel van a tök határeset dinamikájához, ami ergodikus. Viszont a kis szögben ütköző, a fal közelében maradó pályák szöge érvelésem szerint véges időn belül felnövekszik és kitér a határ közeléből. Ezt igazolják a kisszögű pályák Ljapunov-exponensére irányuló méréseim is. Tehát a folytonos átmenet során nem szükségszerű, hogy csak határesetben lássunk ergodicitást. Ez egy nagyon fontos különbség az előzményekben tárgyalt cikkekhez képest. Továbbá ez az eredmény egyértelműen az általam kialakított modell tulajdonságainak köszönhető.

Fontos lépéseket tettem a kaotikus tengerben kialakuló szigetek kialakulásának megértése felé. A szigetek periodikus pályák környezetében alakulnak ki, és – vizsgálataim szerint – ehhez a periodikus pályának stabilnak is kell lennie. Ezen pályák természetesen az asztal geometriájának változtatásával eldeformálódnak, ami a stabilitásuk megváltozásával is jár. Nagyobb deformáció esetén pedig a periodikus pálya is torzulhat, elveszítheti periodicitását. Amennyiben a pálya stabil, körülötte sziget alakul ki. Ha azonban instabillá válik, a sziget is megszűnik. Továbbá a sziget megszűnését a periodikus pálya geometriai megszűnése, a periodicitás elvesztése is okozhatja. A sziget átalakulását, több részre szakadását – szimulációim alapján – a periodikus trajektória stabilitásvesztésével párhuzamosan történő, többszörös periódusú pályák stabillá válása okozza. Ez az eredeti sziget több részre szakadásával jár.

Tovább vizsgáltam olyan geometriáknál, ahol nincs, vagy csak kevés sziget található a fázisképen. Ebben a (b,c) tartományban sikerült néhány jellegzetességet észrevennem különböző pályák Ljapunov-exponensében. Bár többször mértem különböző meredekségeket, különböző kaotikus tengerekben, nem egyértelmű az ezt

meghatározó szabályszerűség. Ezt a bizonytalanságot elsősorban a szigetek hatásával magyarázom. Tapasztalataim alapján a szigetek jelenléte – a szigetmérettel arányos mértékben – növeli a mért exponenst. A méretfüggés nem meglepő, hiszen minél nagyobb tartományt takarnak ki a fázistérből a szigetek, annál kisebb tartományon pattognak a pályák, azaz annál hamarabb távolodik el egymástól két, kezdetben közeli trajektória.

Az előzményben tárgyalt cikkek tengersizétválásról számolnak be a körhöz közeli geometriákban. Ezen eredményeket egzaktul visszakaptam, sőt a komponensek Ljapunov-exponenseit is megvizsgáltam. Bár gyakran különböző exponenst kaptam, egyértelmű szabályszerűséget nem tudtam megállapítani. Ezen kívül újszerű tengersizétválást is megfigyeltem, amikor a komponensek nem $c=1$ -hez közel, hanem a körtől távolabb különülnek el. Ilyen esetekben viszont egyértelműen különböző exponenseket mértem a különböző komponensekben. A kaotikus tenger ezen elkülönülése megkérdőjelezi Hénon és Wisdom transzverzális invariáns görbéiről vallott nézeteit, miszerint azok választják el a különböző ergodikus komponenseket egymástól. Bár az általuk tárgyalt diszkontinuitások hatása egyértelműen igazolódott, az általuk elemzett kioltó-pályák szerepét a szimulációim nem támasztják alá. A kioltó-pályáknak megfelelő kezdeti feltételből indítva első ránézésre tényleg folytonos görbét kaptam, viszont ránagyítva apró szigeteket láttam egymáshoz nagyon közel. Hogy egy-egy ergodikus komponens ilyen sziget-rendszer határol nem csak az általuk említett esetekben tapasztaltam, hanem a szigetek szélén is gyakran láttam ilyeneket. Bár a kérdés nyitott maradt, a program lehetőséget nyújt ennek tisztázására is.

Végül néhány további jelenség bemutatásával igyekeztem érzékeltetni, hogy a biliárdcsalád tartogat még megválaszolatlan kérdéseket. Vannak tranziens effektusok, amik megnehezítik eddigi vizsgálataim folytatását, viszont új megvilágításba helyezik azokat.

A téma folytatásaként potenciált látok a kevert fázistér további vizsgálatára és az eredményeim általánosítására más geometriákban is. További általánosításként a biliárd szimmetriáinak hatását vizsgálnám, kevesebb szimmetriával rendelkező geometria folytonos áttranszformálásával nagyobb szimmetriájú rendszerré.

Míg az élénken kutatott ún. gomba-biliárd [9] mesterkélten keveri az ergodikus és az integrálható dinamikát, azaz a valós térben is elkülöníthető a kétféle viselkedés, addig az általam kialakított modell természetesebben vegyíti őket. Ilyen értelemben a modellem közelebb áll a standard leképezéshez [12], vagy az elliptikus stadionhoz [10], mint a gomba-biliárdhoz. Egy hasonlóság mégis van: mind a négy modell a kevert fázistér analitikus vizsgálatára alkalmas.

VI. Köszönet

Mindenekelőtt szeretném hálámat és köszönetemet kifejezni témavezetőmnek, Dr. Bálint Péternek lelkiismeretes útmutatásáért, folyamatos és fáradhatatlan segítségnyújtásáért, illetve jótékony noszogatásaiért. Hasznos észrevételei nagymértékben segítettek és gyorsították a program fejlesztését, és gördülékennyé tették annak tesztelését. Eredményeim értelmezésében, azok helyes megfogalmazásában, és TDK-munkám, illetve később a diplomamunkám írásában értékes megjegyzései és bölcs tanácsai nagyon sokat segítettek. Továbbá köszönetet szeretnék mondani Dr. Szász Domokosnak és Dr. Tóth Imre Péternek ritka, ugyanakkor elgondolkodtató probléma-felvetéseiért. Végül, de nem utolsósorban szeretném megköszönni Dr. Varga Imrének, hogy bátorított és biztatott.

VII. Irodalomjegyzék

- [1] S. Tabachnikov: Billiards, ``Panoramas et Syntheses'', Soc. Math. France, 1995
- [2] N. Chernov - R. Markarian: Chaotic billiards, to be published in the Mathematical Surveys and Mongographs of the AMS
<http://www.math.uab.edu/chernov/papers/book.pdf>
- [3] G. Benettin and J.-M. Strelcyn: Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: Stochastic transition and entropy (*Phys. Rev. A* (1978) 17(2):773–785,)
- [4] L. A. Bunimovich, On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards (Comm. Math. Phys. 65 (1979) 295-312)
- [5] M. Hénon - J. Wisdom: The benettin-strelcyn oval billiard revisited (*Physica 8D* (1983) 157-169)
- [6] V. Donnay, Elliptic island in generalized Sinai billiards (Ergodic Theory and Dyn. Sys. 16. (1997) no 5, 975-1010)
- [7] Szász Domokos, Dinamikai rendszerek, 10. fejezet
<http://www.renyi.hu/~szasz/dynsys/dr10.ps>
- [8] N. Chernov, H. K. Zhang: Billiards with polynomial mixing rates (Nonlinearity, 18 (2005) 1527-1553)
- [9] L. A. Bunimovich: Mushrooms and other billiards with divided phase space (Chaos 11 (2001) 802–808)
- [10] R. Markarian, S. O. Kamphorst, S. P. de Carvalho: Chaotic properties of the elliptical stadium (Comm. In Math. Phys. 174. (1996) no 3, 661-679)

- [11] Rappné Pogány Orsolya: Decay of correlations in squash-shaped billiards
(Diplomamunka 2005. BME Matematika Intézet,
<http://www.math.bme.hu/~pogacs/diploma/dipl06.pdf>)
- [12] Tél Tamás, Gruiz Márton: Kaotikus dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó,
Budapest 2002. 248-256

A, DVD-melléklet

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.