TARTALOMJEGYZÉK

I. BEVEZETÉS ---------- 2

II. ELŐZMÉNYEK ---------- 3

II.1. A Benettin-Strelcyn biliárd[3] ---------- 3
II.2. A Benettin-Strelcyn biliárd felülvizsgálata[5] ---------- 6
II.3. A tökbiliárd ---------- 8

III. A KÉTPARAMÉTERES BILIÁRDCSALÁD VIZSGÁLATA ---------- 9

III. 1. A geometria ---------- 9
III. 2. A program ---------- 11

IV. EREDMÉNYEIM ---------- 15

IV.1. Érdekes, új tartomány ---------- 15
IV.2. Ergodicitás véges esetben ---------- 16
IV.3. Egyszerű szigetsors ---------- 19
IV.4. További érdekes jelenségek ---------- 23

V. ÖSSZEFOGLALÁS ---------- 24

VI. KITEKINTÉS ---------- 24

VII. FELHASZNÁLT IRODALOM ---------- 26

I. Bevezetés

Klasszikus dinamikai rendszerek sztochasztikus tulajdonságainak kutatása több mint fél évszázados múltra tekint vissza. Ez idő alatt számos numerikus vizsgálatot végeztek, és több-kevesebb elméleti hátteret is igyekeztek szolgáltatni azok alátámasztására. Szimulációs eredmények sora hívja fel a figyelmet egy újfajta jelenségre, az úgynevezett sztochasztikus átmenetre. Ez a jelenség olyan rendszerek sajátja, melyeket integrálható viselkedésű rendszerek perturbációjaként kaphatunk. Az átmenet az integrálható viselkedést folytonosan ergodikussá transzformálja.

Kevert dinamikával rendelkeznek a tipikus Hamiltoni rendszerek, fázisportréjuk jellemzően kaotikus tartomány(ok)ban elhelyezkedő rendezett szigetekből áll. Mivel a teljesen integrálható és a teljesen kaotikus dinamika vizsgálatához különböző analitikus eljárások használatosak, a határesetektől távol mindkét megközelítés érvényét veszti. A kevert fázisterű rendszerek szigorú matematikai tanulmányozása ezért nehézkes feladat. Ehhez hasonlóan a numerikus vizsgálat sem könnyű, hiszen pl. minél kisebb egy sziget, annál nehezebb szimulációk során észrevenni, továbbá a szimulációk véges mivolta is megnehezíti a helyes megfigyelést. Számos próbálkozás ismert az irodalomban olyan rendszerek keresésére, amelyek megfelelő analitikus vizsgálatot tesznek lehetővé.

A biliárdok[1,2] olyan dinamikai rendszerek, melyek a biliárd játékhoz hasonlóan, egy tartományból, és az azt határoló görbéből, illetve a tartományon súrlódás nélkül mozgó tömegpont(ok)ból áll. A játéktól eltérően a sarkokban nincsenek lyukak, sőt a matematikai biliárdok fala sem feltétlenül négyszögletes. Ezen felül a falak által határolt tartomány sem feltétlenül konvex és nem is feltétlenül sík. Általánosságban beszélve a tömegpont konstans sebességgel halad a tartomány geodetikusai mentén, míg el nem éri a falat. Ekkor úgy pattan vissza teljesen rugalmasan, hogy sebességvektorának tangenciális komponense megmarad, míg a normális komponens előjelet vált. Ez 2 dimenzióban az optikából is jól ismert szabály: a beesési és a visszaverődési szög megegyezik. A reflexiót tekinthetjük úgy is, hogy az adott pontbeli normálisra tükrözzük az egész biliárdot, és a pálya egyenesen halad tovább a tükrözött biliárdban. Ez alapján akár azt is mondhatjuk, hogy tulajdonképpen egy egyenes pálya van a biliárd falai közé speciálisan behajtogatva.

Talán így már könnyű belátni, miért kevésbé érdekesek a poligonális biliárdok, melyekben az ütközési pont kis bizonytalansága a fal mentén az ütközés után sem változik, a beérkező párhuzamos pályák ütközés után is párhuzamosak maradnak. Érhető módon érdekesebbek az ovális biliárdok, amelyekben az ütközés helyétől nagymértékben függ a beérkező pálya kis környezetének visszaverődés utáni sorsa. A párhuzamos pályák az ütközés után fókuszálódhatnak, illetve defókuszálódhatnak, de semmiképp sem maradnak párhuzamosak.

A biliárdokban létezik egy természetes abszolút folytonos invariáns mérték, a Lebesque-mérték. Ergodikus komponens alatt, mindig ezt a mértéket értem. Numerikus szimulációkban ezek jó közelítéssel, mint adott tartományt sűrűn bejáró pályák figyelhetőek meg.

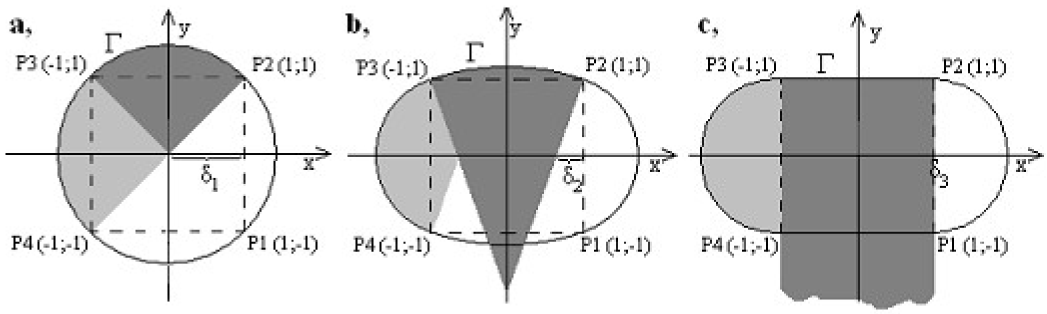
Az általam vizsgált rendszer a kevert dinamika jelenségeinek vizsgálatára jött létre. Ez a konvex, ovális biliárd folytonosan transzformálható, melyet két változó paraméterez. A rendszer ebben a formában alkalmas a sztochasztikus átmenet tanulmányozására.

II. Előzmények

Az előzményként szolgáló cikkek a sík egy konvex tartományában mozgó tömegpont viselkedésének numerikus vizsgálatairól számolnak be. Ez a tartomány egy folytonos transzformációval deformálható, sztochasztikus átmenetet képezve az integrálható és az ergodikus viselkedés között. Az egyik határesetet a körbiliárd, a másikat a Bunimovich-féle stadion biliárd adja.

II. 1. A Benettin-Strelcyn biliárd[3]

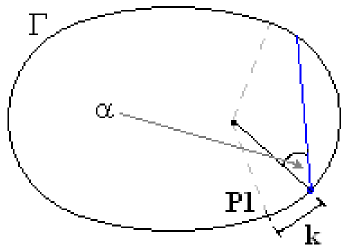
Legyen Q egy kompakt konvex tartomány, amit az egyszer differenciálható Γ határol. Ezt a határt négy körívből állítjuk össze, úgy hogy azok páronként közös érintővel rendelkezzenek. Ezt úgy érjük el, hogy az ívek egy rögzített négyzet sarkaiban (P1,P2,P3,P4) érintkeznek. A folytonos átmenetet $0 \leq \delta \leq 1$ paraméterezi, ami a P1P2, ill. P3P4 ívek középpontjának a P1P2 szakasztól mért távolsága. Ekkor $\delta=1$ jelenti a kört, és $\delta=0$ jelenti a stadiont. Az alábbi ábrán jól látszik, hogyan változnak a közös érintők és az ívhosszak, δ függvényében. Ha δ-t csökkentjük, a P1P2 és a P3P4 (világosszürke) ívek sugarai csökkennek, míg nyílásszögük növekszik, ezzel ellentétben a P2P3(sötétszürke) és P4P1 ívek sugarai nőnek, de nyílásszögük csökken.



1. Ábra A Benettin-Strelcyn biliárd geometriájának változása δ függvényében ($1=\delta_1 > \delta_2 > \delta_3=0$)

A körbiliárd fázistere invariáns tóruszok uniója, amelyekben a mozgás (kvázi-) periodikus. Továbbá létezik megmaradó mennyiség (jelen esetben pl: a visszaverődés szöge (α), vagy az $L=x*\sin(\varphi)-y*\cos(\varphi)$ kifejezés, ahol x és y a tömegpont Descartes koordinátái, ill. φ a sebességvektor x tengellyel bezárt szöge), a körbiliárd teljesen integrálható viselkedést mutat. A stadion ezzel szemben erős sztochasztikus tulajdonságokkal rendelkezik. Mivel a stadion ergodikus[4], az átmenet végére az invariáns tóruszok eltűnése garantált. Továbbá az átmenet folytonossága az ergodikus és az integrálható komponensek egymás kárára történő növekedését/csökkenését sugallja, bár a $0<\delta<1$ köztes esetek ergodikus tulajdonságairól nincsenek elméleti eredmények

A golyó minden egyes visszapattanásához két változót rendelhetünk: az egyik ($0 \leq k < |\Gamma|$, ahol $|\Gamma|$ jelöli Γ hosszát, és $k \in R$) a visszapattanás helyének P1-től pozitív irányban mért távolsága (kerületi paraméter), a másik ($|\alpha| \leq \pi/2$) pedig a visszaverődés belső normálistól mért szöge (visszaverődés szöge). Az így kapott N cilinder az összes lehetséges visszaverődést tartalmazza. A cilinder egyértelműen leképezhető a sík egy



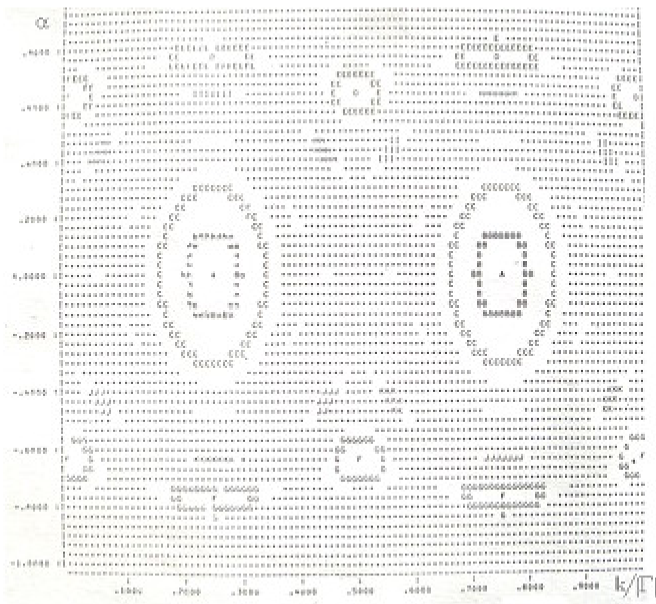
2. Ábra A két koordináta

tartományára. Továbbá minden ütközés egy következő ütközést indukál, a trajektória pontjainak koordinátáit meghatározva a síkon. Ezek alapján a síknak ezt a tartományát fázistérként értelmezhetjük.

A cikk íróinak egyik legfőbb módszere a grafikus analízis volt. A geometria változtatásának fázistérre gyakorolt hatását kísérték figyelemmel így. A szimulált pályák vizsgálatához csak a visszapattanásokhoz rendelt koordinátákat számolták ki, majd ezeket ábrázolták. Adott δ–hoz több kezdeti feltétellel indítottak pályákat egyszerre, így kapták az egyes geometriákhoz tartozó jellegzetes fázisportrékat (pl.: 3. ábra).

A fázistér legjellegzetesebb elemei:

- Az n ütközés alatt záródó periodikus pálya, a fázistérben n db izolált pontként jelenik meg.
- Ezzel szemben a kvázi-periodikus pálya pontjai mind egy határozott, zárt görbén helyezkednek el (sűrűn).
- A sztochasztikus trajektóriák pontjai pedig egy határozott tartományt töltenek meg (sűrűn).



3. Ábra A fázistér ábrázolása δ=0,6 esetén, az 1976-os cikk-ben[1]

(az ábrán a különböző betűk és szimbólumok különböző trajektóriák pontjait ábrázolják)

Stadion határesetben a fázisteret egyetlen ergodikus komponens tölti ki, azaz majdnem minden kezdeti feltétellel indított pálya bejárja a teljes fázisteret (a periodikus pályák nullmértékű halmazt alkotnak). Kis mértékben növelve δ-t, a stadionhoz közel (δ~0) két sziget figyelhető meg. Tovább növelve δ-t, egyre több sziget jelenik meg. Bennük periodikus és kvázi-periodikus pályák találhatóak. Ellenőrizhető, hogy egyszerű periodikus pályák adják a szigetek közepét. Ezek köré rendeződnek a (kvázi-)periodikus pályák pontjai. Tehát a szigetek belső szerkezete rendezett.

A szigeteket sztochasztikus tenger veszi, körül, ami δ<0,75 esetén egy pályához tartozó pontokból áll. Amint δ eléri ezt a kritikus értéket, az ergodikus tenger szétválik két invariáns komponensre. A körhöz tovább közeledve egyre több invariáns komponenst kapunk, amelyek egyre keskenyebb (vízszintesnek egyre inkább nevezhető) sávokba rendeződnek. Kör határesetben pedig minden pálya megőrzi a visszaverődési szögét, azaz az egyik koordinátája rögzített. Ezért a fázisportré végtelen sok pálya képéből, azaz végtelen sok párhuzamos vonalból fog felépülni.

Összességében a cikk felvázolta a geometria változásával járó fázistérbeli változások főbb vonásait. Bár ezt a cikk nem hangsúlyozza, de a fáziskép csak a stadion határesetben ergodikus teljesen. A kaotikus fázisportré a legkisebb perturbációra is megváltozik, két sziget jelenik meg. Az egyre nagyobb számban megjelenő szigetek reprezentálják a rendezett fázist. Később a tenger is több invariáns részre szakad, ezzel növekvő számú, keskenyedő sávot alkotva a fázistérben. Bár nyilvánvaló, de a cikk mégsem hangsúlyozza, hogy a keskenyedő sávokban a szigetek mérete szintén jelentős mértékben csökken. Végül pedig a kör, vonalas fázisképét kapjuk.

A grafikus analízis során megfigyelt legfontosabb jelenség az integrálható és az ergodikus komponens(ek) együttes létezése volt, sőt kimutatták több különböző, invariáns ergodikus komponens egyidejű létezését is. Mindazonáltal a cikk ezen eredményei és sugallatai mind numerikus vizsgálatokon alapulnak, más elméleti eredmények fényében mégis alkothatunk ezek alapján egy – ezeket magyarázó – heurisztikus képet.

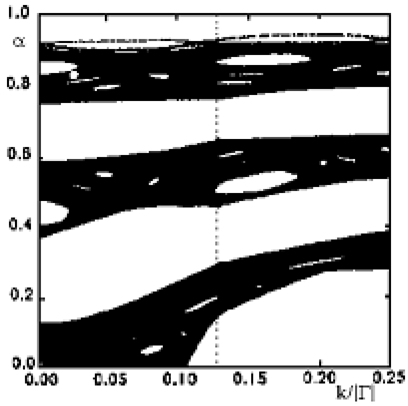
II. 2. A Benettin-Strelcyn biliárd felülvizsgálata[5]

Néhány évvel később jelent meg Hénon és Wisdom kiegészítő jellegű cikke.

Az irodalomban a legtöbb gyakran vizsgált dinamikai rendszer olyan egyenletekkel írható le, amelyek megfelelően sokszor differenciálhatóak (reguláris eset), hogy a KAM-tételt[6,7] alkalmazni lehessen. Ez a tétel nagyon hasznos lenne több jelenség leírásához. De a biliárd határvonalának görbülete nem folytonos, négy pontban is szakadása van. Ez diszkontinuitásokat idéz elő a hozzárendelt leképezés elsőrendű deriváltjában is, ezért az említett tétel nem alkalmazható. A korábbi cikk szerint a kaotikus tartományban nincs szembetűnő különbség a reguláris esethez képest. A felülvizsgálat szerint viszont, az invariáns görbék tulajdonságai ettől jellegükben eltérnek.

Néhány millió pont szimulálásával és grafikus analízis segítségével pontosították az előző cikk szimulációs eredményeit. A kaotikus tenger kettéválását ők is δ 0,75 és 0,76 közötti értékénél figyelték meg. A cikk szerint az ilyen jellegű különválásoknál egy-egy transzverzális invariáns görbe feltételezése indokolt, ami a komponensek között helyezkedik el. Így a transzformáció során, a körhöz közeledve a növekvő számú egyre vízszintesebb és keskenyebb sávok mellett, növekvő számú invariáns görbe is megjelenik. Ez a kép már nagyon hasonlít több, a KAM-tétellel leírható, vizsgált rendszer viselkedéséhez. A tétel szerint egy integrálható rendszer perturbációját alakjuk torzulásával ugyan, de több invariáns görbe is túlélheti. Ezek a túlélők pozitív mértékű halmazt képeznek. Ezért számítottak a cikk írói a köztes esetekben pozitív mértékű invariáns görbehalmazra. Ettől azonban a numerikus eredmények lényegesen eltérnek, köztes esetekben csak véges számú transzverzális invariáns görbét kaptak. Ez az eltérés nem meglepő, ha figyelembe vesszük, hogy a tétel nem alkalmazható (a leképezés kellő számú deriválhatósága nem biztosított).

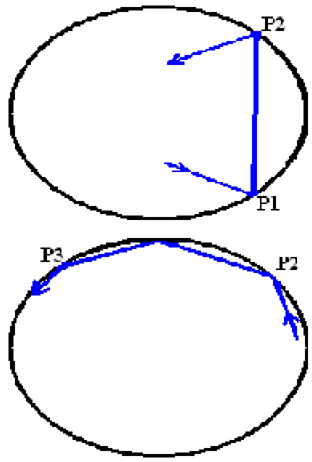
Vizsgálataik során, a derivált szakadásait okozó pontok – az ívek találkozási pontjai – hatására koncentráltak. Diszkontinuitási vonalnak nevezik azon pontok halmazát a fázistérben, amelyeknek a kerületi koordinátája az egyik ilyen pontot (P1,P2,P3,P4) határozza meg. Tapasztalataik szerint a fázistér bármely tartományán, ami két ilyen vonal között van, a leképezés analitikus. Ezek a vonalak nyilvánvalóan befolyásolják a szigetek sorsát is. Figyelemreméltónak találták, hogy egyik sziget sem lépi át a diszkontinuitási vonalakat, bár gyakran érintik azokat. Ezért a grafikus analízis során ezeket a vonalakat szaggatott vonallal jelölték (4.ábra).



4. Ábra Részlet a fázistérből, 3 ergodikus komponens látható, δ=0,85 (a '82-es cikk alapján)

A diszkontinuitástól való tartózkodásnak két fontos következménye van. Az első, hogy a kettőperiódusú pálya (az egyenesedő ívek közepén, a normálisok egyenesén oda-vissza pattogó trajektória, lásd: IV. fejezet) körüli szigetet leszámítva, minden sziget reguláris tartományban marad, ahol nem találkozhat a szakadásokkal. Ezért a reguláris esethez hasonló általános képet fogja nyújtani a szigetek sorsa. Ezt igazolták tapasztalataik, azaz a sziget belsejében lévő kezdeti feltételek pozitív mértékű halmazára invariáns görbén marad a pálya. A második következmény, hogy a szigetek széle nem érintheti a diszkontinuitást. Heurisztikus magyarázatuk szerint, az invariáns görbéken sűrűn vannak a trajektória pontjai, és ha az a szakadást okozó pontokat érinti, sehol sem lesz a leképezés differenciálható. Így egy sima invariáns görbe nem lépheti át a diszkontinuitásokat.

Néhány invariáns görbe mégis túlélheti a szakadással való találkozást. Ezek történetesen a transzverzális invariáns görbék, amelyek az ergodikus komponenseket választják el. Ezt pedig a cikk írói az úgynevezett „kioltó-pályákkal” magyarázzák. Szerintük a diszkontinuitás átlépése csak akkor lehetséges, ha ennek káros hatásait valami kioltja. Erre az olyan pályáknak van esélye, amelyek két diszkontinuitási pontot is érintenek. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az első ütközés káros hatását, a második igyekszik ellensúlyozni. Az ilyen jellegű pályákra mutat az 5. ábra két egyszerű példát. Természetesen a két sarokkal való ütközés között több köztes pattanás is lehetséges, illetve a két diszkontinuitással való találkozás nem feltétlenül jelent két különböző sarkot.



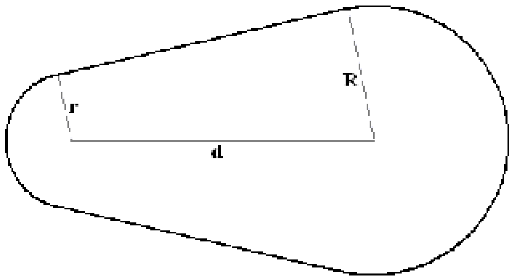
5. Ábra Példák a kioltó-pályákra

A szimulációk alapján kijelenthető, hogy a kaotikus tartományok határán vannak ilyen pályákat reprezentáló pontok. A numerikus eredmények továbbá azt is mutatják, hogy a transzverzális invariáns görbék, amennyiben léteznek, kioltó pályák. Ennek viszont a fordítottja nem igaz. Adott δ értékre végtelen számú kioltó pálya létezik, de közülük csak véges számú alkot invariáns görbét. Nem csoda hát, hogy az előző cikk vizsgálatai során nem tűntek fel, hisz véletlenszerű kezdeti feltételekkel nem lehet őket megtalálni. Ez fontos eltérés a reguláris esethez képest, ahol bármilyen kezdeti feltétel mellett több invariáns görbe is található.

A kioltó pályák léte szükséges, de nem elégséges feltétele invariáns görbék létezésének, és az ergodikus komponensek különválására. A cikk tanulsága szerint egy adott típusú kioltó-pálya, csak δ bizonyos értékeire válik invariáns görbévé. Ettől eltérő esetekben a különböző kaotikus komponensek összeolvadnak, és ezáltal megkülönböztethetetlenekké válnak.

II. 3. A tökbiliárd

A sík egy Q tartományát határolja Γ, ami két körívből és két egyenes szakaszból épül fel a következőképp: a két ív sugarai *R*, és *r*, ($R \geq r$), középpontjaik egymástól *d* távolságra helyezkednek el. Az íveket közös külső érintőjük által meghatározott egyenes szakaszok kötik össze. Ezek alapján a stadion is egy speciális tökbiliárd, ahol az ívek sugarai egyenlők. A tökbiliárddal kapcsolatos vizsgálatok során a d távolságot, illetve a sugarak nagyságát szokták variálni.



6. Ábra A tökbiliárd geometriája

Bunimovich megmutatta[4], hogy a stadionban a Ljapunov-exponens majdnem mindenhol pozitív, és hogy a stadion ergodikus. A tökbiliárdok is ergodikusak és hiperbolikusak. Mindkét esetben a párhuzamos pályák ütközés után eleinte konvergálnak, fókuszálódás után viszont széttartanak. Ez fázistérbeli terjeszkedést is jelent, amennyiben tovább divergáltak, mint ameddig fókuszálódtak.

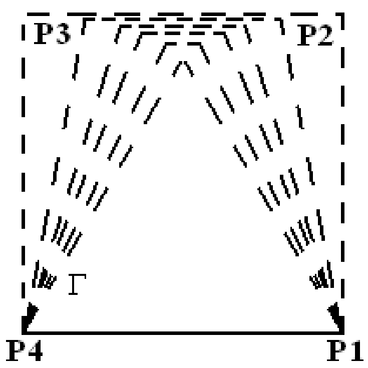
III. A kétparaméteres biliárdcsalád vizsgálata

III. 1. A geometria

Az előzményben összefoglalt cikkek folytonos átmenetet vizsgáltak rendezett és rendezetlen fázisterű rendszerek között. Grafikus analízis alapján vontak le következtetéseket a kevert fázistérről, míg az teljesen ergodikussá csak a stadion határesetben válik. Ezek alapján jogosan merülhet fel a kérdés, hogy ezek a tanulságok mennyire általános érvényűek, mi az, ami a transzformáció sajátossága, és mi az, ami attól független.

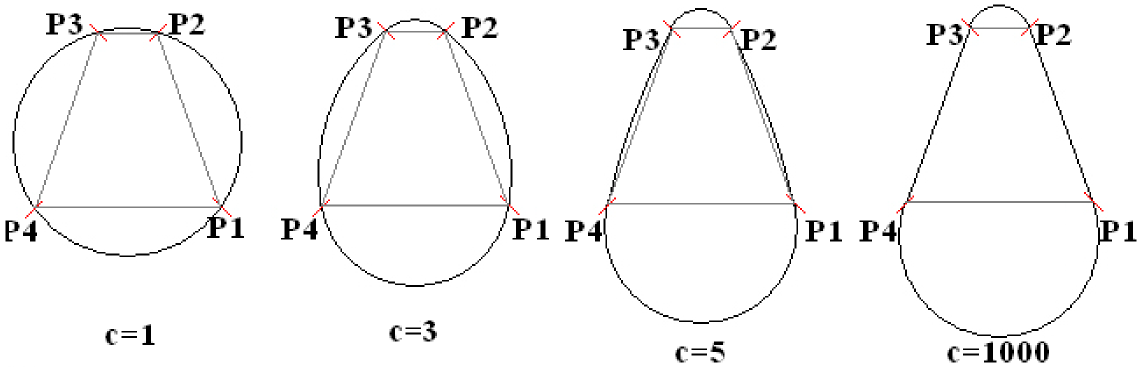
A tökbiliárd hasonló tulajdonságokat mutat[8], mint a stadion, és szintén áttranszformálható körré. Azaz szintén alkalmas a rendezett-rendezetlen átmenet vizsgálatára. Sőt megfelelő paraméterezéssel határesete a kör-stadion átmenet is, amit már többen vizsgáltak. Ezért választottam ezt az általánosított transzformációt a TDK-munkám tárgyául.

A tök-stadion-kör transzformáció a következő paraméterekkel kontrollálható: Adott a sík Q tartománya, amelyet a négy körívből felépülő Γ határol. Minden körív egy speciális húrtrapéz szomszédos csúcsait köti össze. A P1P2P3P4 húrtrapéz alapja és két szára egyenlő hosszúságú, így annak megadására már csak egy szabadsági fok marad. A $0 \le b \le 1$ paraméter a húrtrapéz negyedik oldalhosszának felét – és ezzel magát a húrtrapézt – határozza meg. Tehát a húrtrapéz két lehetséges határa az egyenlő oldalú háromszög (b=0), illetve a négyzet (b=1). Az így kapott húrnégyszög természetesen még csak a keretét adja a transzformációnak.



7. Ábra A b paraméter által meghatározott néhány lehetséges húrtrapéz

A négy körív a P1, P2, P3, P4 pontokban páronként közös érintővel kapcsolódik. Sugaraik nagyságát pedig a második $1 \le c$ valós paraméter határozza meg. Ez az, ami a Benettin-Strelcyn-féle átmenethez hasonlóan a rendezett-rendezetlen átmenetet paraméterezi. Értéke határozza meg a P1P2 (nagy) és a P4P1 (közepes) sugarak arányát, és ezzel a másik két ív nagyságát is (a függés jól látható a 8. ábrán). Így tehát az egyik határeset, mikor a sugárarány éppen egy, és a körívek a húrtrapéz köré írható kört alkotják, ez a teljesen integrálható viselkedésű körbiliárdot jelenti.

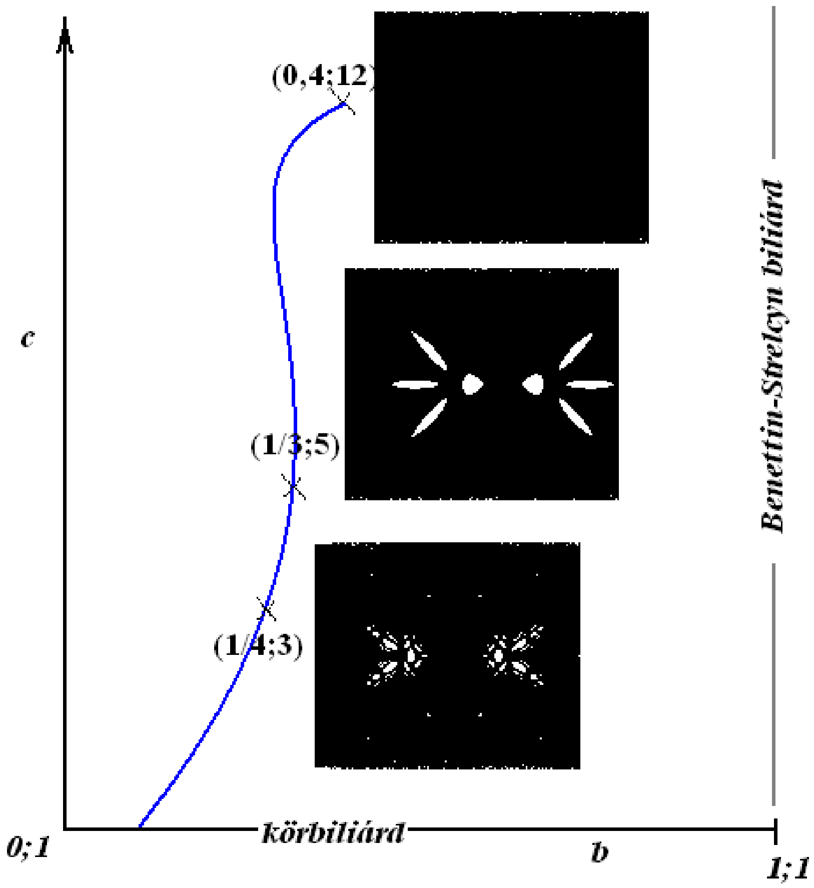


8. Ábra A c sugárarány paraméterezi az átmenetet körből tökbe, adott b mellett (itt b=1/3)

A másik határeset, amikor *c*=∞, ekkor a P1P2, illetve a P3P4 ívek teljesen kiegyenesednek. Ez pedig a jól ismert tökbiliárdot adja.

Mivel a két paraméter egymástól független, bármilyen *b* érték mellett kapott eredmény összehasonlítható más eredményekkel. A második, azaz a *c* paraméter lehetséges értékei nyílt halmazt képeznek. Ez azt jelenti, hogy a Benettin-Strelcyn transzformáció paraméteréhez képest a c paraméter tere ki van nyújtva. Ez pedig a vizsgálat szempontjából praktikus, hiszen az ergodicitás kialakulását kívántam tanulmányozni, ami várakozásaim szerint a határesethez közel történik meg. A nyújtott paramétertér pedig részletesebb vizsgálatot enged.

Ezzel a transzformációval a paramétertér bármely pontja meghatároz egy konkrét geometriát, ezért bármilyen görbe mentén vizsgálhatjuk a fázistér változásait. Célszerűen a körből bármilyen tök transzformálható, illetve a transzformáció bármilyen útvonalon haladhat. A 9. Ábra egy lehetséges útvonalat ábrázol, a jelölt pontok mellett szemléltetésül az adott geometria fázisportréját ábrázoltam.



9. Ábra A paramétertér bármilyen görbéje mentén vizsgálódhatunk. A b=1 speciális esetben a Bennettin-Strelcyn-féle transzformációt kapjuk vissza. A c=1 egyenes pedig az ehhez hasonló (párhuzamos) transzformációk kiindulópontjaként szolgálhat.

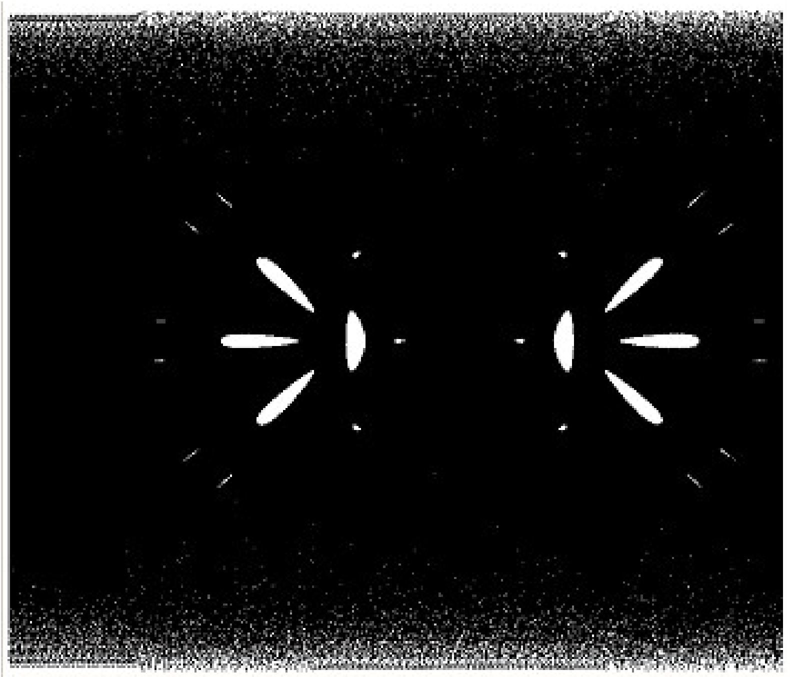
A kapott transzformációhalmaz a Benettin-Strelcyn transzformáció általánosítása. A kapott kétparaméteres biliárdcsalád a korábbi eredmények új megvilágításba helyezéséhez, illetve általánosításához igen hasznosnak bizonyult.

III. 2. A program

A program írásakor az elsődleges szempontok a pontosság és a gyorsaság volt. A pontosság fontos volt, hiszen – a cikkek tanulsága szerint – meg kell tudni különböztetni különböző ergodikus komponenseket egymástól. A C++-ban megírt algoritmus 64 bites lebegőpontos változókkal számol, ami a cikkek számolási pontosságát meghaladja. Egy-egy iterációs lépésben az egyenes vonalú pálya és a biliárdasztal metszéspontját számolja derékszögű koordinátarendszerben, majd a visszaverődésnél egy új egységvektort, ami a reflektált pálya irányába mutat. Minden lépés végén az ütközés két koordinátáját kapjuk, azaz a visszapattanás helyét és szögét.

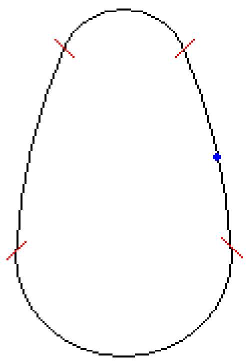
Ami a sebességet illeti: a cikkek szerzői egy-egy kezdeti feltételből indított pályát 10 milliós nagyságrendű iterációs lépésig követtek. Ez a programommal körülbelül 2-2,5 perc alatt szimulálható le egy ma átlagosnak számító asztali számítógépen. Ez lényegesen gyorsabb, mint a korábbi szimulációk, ezért sokkal részletesebb vizsgálatra nyílik lehetőség.

Eleinte a kiértékelést külön programokkal próbáltam megoldani, de ez sokkal lassabbnak bizonyult, mint maga a szimuláció, és több ismétlődő lépést is tartalmazott. Ezért határoztam úgy, hogy a kapott adatok kiértékelését is megoldom a saját programomon belül. Tehát kibővítettem az adatok ábrázolásával, a geometriát megjelenítő vázlattal, illetve a fázistéren való tájékozódást segítő eszközökkel. A megjelenített fázisterek normáltak, azaz a kerületi paraméterek a teljes kerülettel le vannak osztva. Ezzel a különböző geometriák fázisportréi könnyebben összehasonlíthatók. Szintén az összehasonlíthatóságot segíti, hogy ezek az ábrák, úgy mint az adatok és a vázlatok, elmenthetőek, illetve később visszatölthetőek. Tehát nem szükséges annyiszor szimulálni, ahányszor csak kérdés merül fel az adott geometriával kapcsolatban.



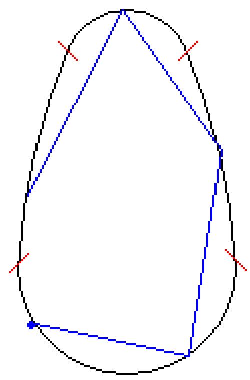
10. Ábra A programmal szimulált fáziskép (1 millió pontot ábrázol), vízszintes tengelyen: a kerületi paraméter, függőleges tengelyen: a visszaverődési szög (a koordináták leolvasása a programon belül történik)

A tájékozódást segítő eszközök sokat segítenek, ezért a fáziskép mellé már indokolatlan lenne koordinátarendszert rajzolni, vagy léptéket mellékelni. Ilyen eszköz pl. a koordináták leolvasását végző kis algoritmus, ami az egérmutató aktuális pozíciója alapján az aktuális Descartes- és fáziskoordinátákat is megjeleníti a kezelőfelületen. Az aktuális fázispont kerületi koordinátájának megfelelő pontot, a geometriát vázoló ábrán egy kék pöttyel jelöli a program (lásd 11. ábra), a szingularitások helyét pedig piros vonallal. Ezzel a fázistér jellegzetességeinek valós térbeli helyéről kapunk képet, illetve szigetek, vagy transzverzális invariáns görbéket okozó pályák és a szingularitások viszonyáról szerezhetünk első benyomásokat.



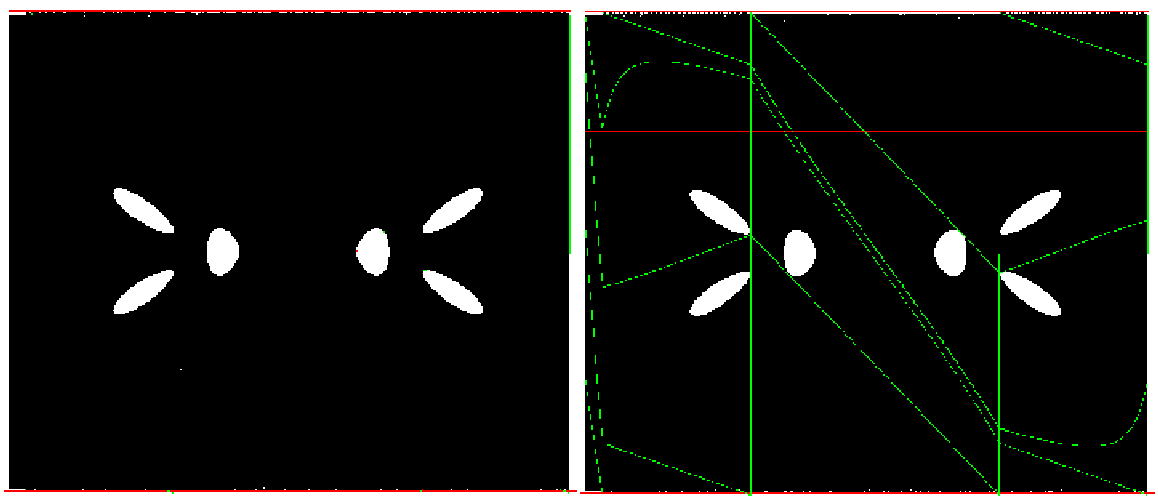
11. Ábra A geometriát ábrázoló vázlat és az aktuális pozíciót jelölő kék pont

Az egérmutató által meghatározott koordináták – mint a fázistér bármely koordinátája – kezdeti feltételként is szolgálhatnak néhány iterációs lépésnek. Az így kapott – az egérmutató helyétől függő – rövid pálya a vázlaton szintén megjeleníthető. A pálya hosszát, azaz az iterációk számát a kezelőfelületen szintén be lehet állítani, ami a periodikus pályák felderítését és osztályozását nagymértékben elősegíti. Ezzel már azok a pontok is felderíthetőek a fázistérben, amelyek a szingularitással való találkozások valamely őséképei, de utalhat több sziget egymás közötti kapcsolatára, illetve segíthet megérteni egy-egy periodikus pálya megszűnését a geometria változásával. Természetesen a vázlat ebben a formában is elmenthető, és később, például egyező periódusú pályák más-más geometriák mellett is összehasonlíthatóak lesznek.



12. Ábra Az aktuális pontból indított rövid pálya

A fázisportrén való tájékozódást, és a jelenségek megértését szolgálja továbbá az opcionálisan megjeleníthető rács. Ez jellegzetes vonalak ábrázolását jelenti a fázisképen. Azon fázispontokat, amelyek szöge 45^o, 90^o, 135^o piros vonal jelöli. Azokat a pontokat pedig, amelyekből indulva az első visszaverődés valamelyik szingularitásban történik, zöld vonal jelzi. Ez a fajta jelölés áttekinthetőbb megfigyelést tesz lehetővé és rávilágít a szingularitások szerepére.(13. ábra)



13. Ábra Fázisportré rács nélkül és ráccsal

Ezen funkciókkal könnyen rendszerezhető, és jól áttekinthető adatbázist tudtam létrehozni a különböző geometriákhoz tartozó fázisportrékból. Az elmentett fázisképek nevében először a *b* paraméter, majd a sugárarány is szerepel, ami a böngészést könnyebbé teszi. Sőt a fázisportré változásairól készült képek abc sorrendben (*b* és *c* szerint lexikografikusan) következnek egymás után, ezért a képnézegető szoftverek többségével úgy vizsgálódhatunk, hogy egyszerűen csak sorban nézegetjük az egymást követő képeket.

Amennyiben az adott geometriában más kezdeti feltétellel is szeretnénk egy pályát indítani, lehetőség van az adatok egy fázisképen való ábrázolására. Sőt, ezt akár úgy is elérhetjük, hogy a kezdeti feltételt az egér segítségével adjuk meg. A kérdéses kezdeti feltételt ábrázoló fázispontra duplán kattintva a szimuláció az adott pontból indul. Ezeket természetesen más-más színnel rajzoltathatjuk. Ez igen hasznos, például szigetek belső szerkezetének felderítésére.

Grafikus analízis során lehetőség nyílik az aktuális pontból induló pálya mentén, a szingularitással történő legközelebbi ütközést jelezni. Ez a funkció csak közvetve segíti az alakzatok osztályozását, és a fázistér feltérképezését, elsősorban ellenőrző szerepe van.

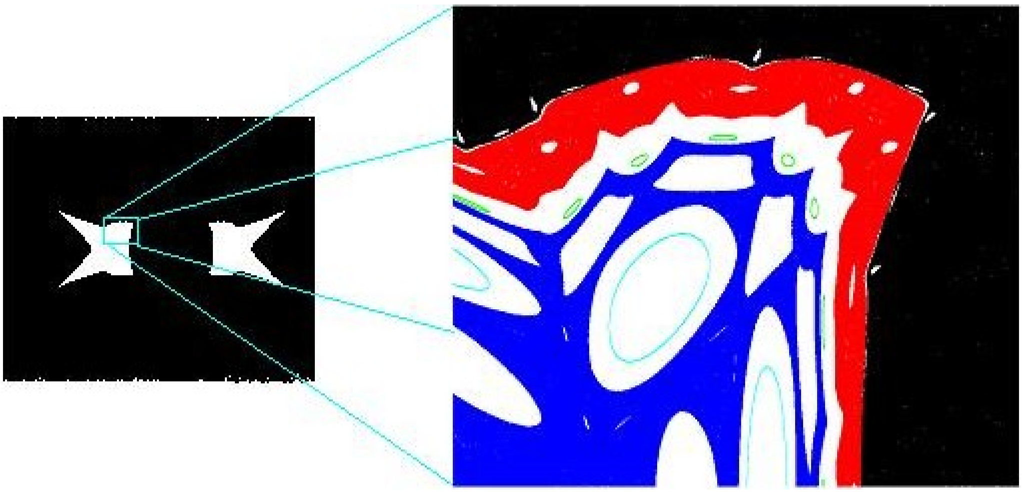
Ehhez hasonló, a kiértékelést segítő eszköz az adott pontból indított pálya periódusát becsülő algoritmus. Ez a rész az első három visszatérés iterációs lépéseinek számából számol legnagyobb közös osztót, így egy becslést adva a pálya periódusára. Azt nevezem visszatérésnek, amikor az adott ütközés utáni fáziskoordináták megegyeznek a kezdeti feltétellel.

Ezzel a becsült, vagy a manuálisan megadott periódussal pedig képes a program a pálya stabilitását kiszámolni. Ez egy fontos előrelépés az eddigi szimulációs eljárásokhoz képest. Stabilitás (*s*) alatt, az elemi $dr,d\psi$ perturbáció egy periódus alatt történő megváltozását leíró transzformációs mátrixnak a nyomát értem. Az elemi perturbáció *B* görbülete a következőképp változik:

- Szabad repülés során: $B'=B/(1+\tau B)$, ahol τ a repülés hosszát jelöli.
- Ütközésnél pedig a $B'=B+2K/\cos(\varphi)$, ahol *K* a fal görbületét jelenti az ütközés helyén, illetve φ a fal normálisától való eltérés szöge.

Ezekből az építőelemekből bármilyen pálya mentén számítható a perturbáció megváltozása, illetve a transzformációs mátrix. Ennek az egységnyi determinánsú mátrixnak a sajátértékei és az egységkör közötti viszony határozza meg a pályák jellegét. Ha a sajátértékek az egységkörön található komplex konjugáltak, a mátrix nyoma $|s|<2$, és az adott pálya elliptikus. Ha sajátértékek valósak, a nyom $|s|>2$, és a pálya hiperbolikus. Degenerált sajátérték esetén pedig a nyom éppen $s=2$, és a leírt trajektória parabolikus. A program ezen funkciója az egér jobb gombjának lenyomásával működtethető, az aktuális ponton. Ez a vizsgálatok során, a jelenségek okainak kutatásában nagyon hasznosnak bizonyult. Már a cikkek szerzői is megmutatták, hogy a szigetek középpontjai periodikus pályákhoz tartoznak. Ennek a funkciónak nem titkolt célja, ennek az összefüggésnek az alátámasztása volt (lásd IV. fejezet), illetve a szigetméret és a periodikus pálya stabilitása közötti kapcsolat vizsgálata.

Ha a szimulált fáziskép felbontása nem lenne megfelelő, a program rendelkezik nagyítás funkcióval is, azaz bármely tartomány megjeleníthető részletesebben is. Természetesen a program összes funkciója működik a nagyított képen is, azaz mind a tájékozódást, mind a kiértékelést segítő eszközök használhatóak. Tehát elképzelhető, hogy a fázistér eredeti felbontásában nem tűnik fel egy kis sziget, amire ránagyítva folytathatjuk a szimulációt, sőt a feltárt kis sziget belső szerkezetét is fel tudjuk deríteni, a benne lévő periodikus pályák numerikus vizsgálatával együtt. Erről az új szigetről azonnal megtudhatjuk, hogy milyen periodikus pálya körül alakult ki, és hogy az vázlatosan hogy néz ki a valós térben. Ezen információk elmentésével az adott sziget növekedését, zsugorodását, születését, eltűnését figyelemmel kísérhetjük, illetve azok körülményeit vizsgálhatjuk.



14. Ábra A fázistér egy része kinagyítva, a nagyított fázisképbe pedig több különböző pályát szimuláltam, különböző színekkel (összesen kb. 10^8 db pontból vett részlet)

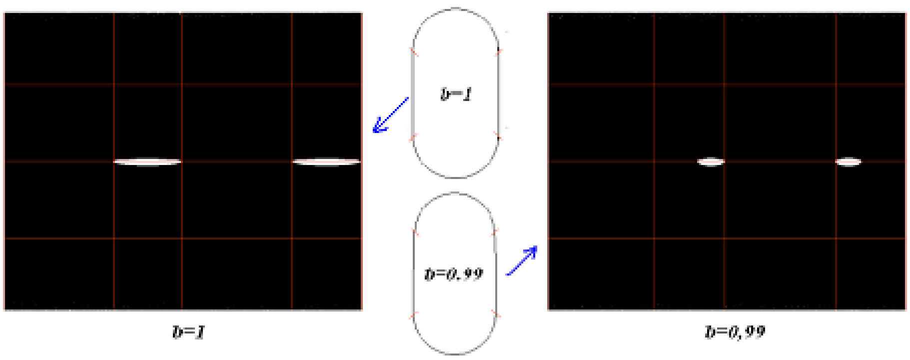
A kiértékelő funkciókkal bővített szimulációs program így gyors, pontos számolást és azonnali kiértékelést, illetve későbbi összehasonlítást tesz lehetővé. A cikk eredményeit és minden említett jelenségét a program igazolta, a leközölt ábrákat visszaadta. A kör-tök-stadion transzformáció vizsgálatához megfelelő, praktikus eszköz.

IV. Eredményeim

IV. 1. Érdekes, új tartomány

A Benettin-Strelcyn-féle átmenet általánosításaként kapott transzformáció egy jelenségekben gazdag, új tartomány vizsgálatát teszi lehetővé. A tipikus ($b<1$) geometria a stadion esetétől lényegesen eltér. Először is a körnek végtelen sok szimmetriatengelye van. A négyzetre felhúzott ívekből álló elrendezésnek viszont már csak két tengelye van (a négyzet oldalfelezői). Amennyiben $b<1$, a trapéz – és ezzel az átmeneti tök is – csak egy szimmetriatengellyel rendelkezik. Ez kihat a fázisportréra is.

A négyzet alapú geometriáknál ($b=1$) a kiegyenesedő ívek lehetővé teszik egy elliptikus sziget kialakulását a 2 periódusú pálya körül. Ebben a geometriában ez az utolsóként eltűnő sziget a stadion felé, azaz az egyetlen sziget, ami elrontja az ergodicitást (lásd 16.Ábra). A sziget – a sugárarány növelésével – függőleges irányban egyre inkább összehúzódik a fázistérben, azaz a normálistól egyre kisebb mértékben eltérő pályák alkotják azt. Határesetben ez a sziget egy vonallá zsugorodik, ami kizárólag a majdnem egyenes íveken történő merőleges visszaverődést takarja. Ez a jelenség b legkisebb változtatásával is megváltozik. A 2 periódusú sziget nemcsak a fázistér függőleges, hanem vízszintes irányában is összehúzódik. Ez praktikusan azt jelenti, hogy a sziget pályái nemcsak egyre kisebb szögeltéréssel rendelkeznek, de az ütközések a valós geometria egyre kisebb tartományán történnek. Ennek a magyarázata egyszerű: Mindkét esetben a sziget közepét jelentő pálya olyan pontokban ütközik a fallal, ahol a szemközti érintők párhuzamosak. Ez a két pont – b=1 és véges c mellett – sugáraránytól függetlenül a majdnem egyenes ívek közepe. Ezzel szemben $b<1$ esetén a sugáraránytól függően vándorolnak a nagy ívek mentén, valamelyik szingularitás felé.



15. Ábra Lényeges különbség a négyzet és a trapéz alapú geometriáknál (a sugárarányok megegyeznek)

A másik fontos különbség, hogy $b=1$ esetén a közepes ív (P4P1) maximálisan félkör lehet, ezzel szemben az átmeneti tökben ($b<1$) az nagyobb is lehet. Ezért érthető, hogy míg a stadionnál a sziget megszűnése csak határesetben történik meg (ami egyben az ergodicitás kialakulását is jelenti), addig $b<1$ esetén ez véges sugárarány mellett megvalósul. Ezen sziget megszűnése, és a P4P1 ív félkörnél nagyobbra növekedése egy érdekes, jelenségekben gazdag, a Benettin-Strelcyn biliárdhoz képest új tartományt fed fel. A kérdéses tartomány b-vel 1-hez közelítve egyre keskenyebb. A továbbiakban ezen tartomány vizsgálatainak tanulságait mutatom be.

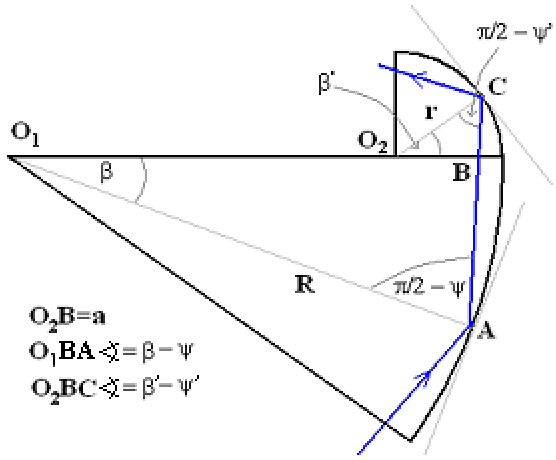
IV. 2. Ergodicitás véges esetben

Először is igyekeztem ezt a tartományt feltérképezni, és a jellegzetességeket megkeresni. Az egyik legszembetűnőbb dolog az volt, hogy feltűnően sokszor adódott teljesen betöltött fázisportré, határesethez közeli geometriákra. Ez a fázisképek felbontása erejéig ergodicitást sejtet. Úgy vélem minden $b<1$-re létezik véges $c(b)$, amely ergodikus geometriát határoz meg. Ez fontos különbség a stadionhoz képest, mert mint az előzményekből kitűnik, stadionban csak határesetben van ergodikus viselkedés, véges sugárarány mellett mindig van integrálható komponens. A véges $c(b)$ sugárarány fölötti ergodicitás feltételezését igyekszik alátámasztani számos szimulációs eredmény, heurisztikus érvelés és némi számítás.

A tapasztalat azt mutatja, hogy elég nagy sugárarány (és b<1) esetén a dinamika bizonyos értelemben tetszőlegesen közel van a $c=\infty$, azaz a tök dinamikájához. Pontosabban a tök-dinamikának ismert az alábbi tulajdonsága. Vegyük a fázispontok olyan halmazát, amelyek épp elhagyni készülnek a kicsi(P2P3), vagy a közepes(P4P1) ívet. Az első visszatérés leképezés erre a részhalmazra egyenletesen hiperbolikus. Elég nagy, véges c-re ez a részhalmaz szintén definiálható úgy, hogy a kis (vagy közepes) ívet épp elhagyó trajektóriát addig követjük, míg először vissza nem tér. Vegyük észre, hogy elég nagy sugáraránynál az ilyen pályák csak véges sokszor pattannak a majdnem egyenes íveken, kivéve, ha az érintővel elég kis szöget zárnak be. Ez a $b<1$ eset különleges tulajdonsága. Hacsak az érintővel bezárt ψ szög nem túl kicsi, az ilyen pályák C^1 értelemben tetszőlegesen közel vannak egy tök-trajektóriához. Mivel az egyenletes hiperbolicitás nyitott tulajdonság, a tök dinamikai viselkedése jellemző a fázistér azon részére, ahol ψ nem túl kicsi (pontosabban $\psi>\psi_{b,c}$, ahol $\psi_{b,c}$ tart a nullához, ha c tart a végtelenhez, minden b<1-re).

Ahhoz, hogy véges c-nél ergodikus viselkedést lássunk, meg kell vizsgálnunk, mi történik a kis (ψ) szögű pályákkal. Ezek a trajektóriák legalább néhány ütközés erejéig a fal közelében maradnak, ezért „surranó-pályáknak” fogom őket hívni. Szimulációk alapján, elég nagy sugárarány mellett ezek a pályák véges időn belül elhagyják a kisszögű, surranó tartományt. Tudjuk, hogy a ψ egy íven való többszöri reflexió során állandó marad. Ezért a vizsgálat tárgyát az ívváltás közben történő változás képezi. Alapvetően kétféle ívváltást kell megérteni, nagyobb ívről kisebb ívre, illetve kisebb ívről nagyobb ívre történő pattanás.

Vizsgáljuk meg közelebbről a nagyobb ívről a kisebb ívre történő mozgást:
Jelöljük a nagy ívvel történő utolsó ütközés helyének szögtávolságát az ívek találkozási pontjától β–val (ahol $0\leq\beta\leq2\psi$), és a pálya érintővel bezárt szögét ψ-vel. Az ívváltás utáni megfelelő koordináták rendre β' és ψ'. Írjunk fel egy-egy sinus-tételt az O_1AB háromszög két szögére: a $\pi/2-\psi$ és a $\pi/2-(\beta-\psi)$ szögekre, ill. az O_2BC háromszög $\pi/2-\psi'$ és $\pi/2-(\beta'-\psi')$ szögeire.



16. Ábra Az ívváltás vázlata

Így kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\frac{R - r + a}{R} = \frac{\cos(\psi)}{\cos(\beta - \psi)} \qquad \frac{a}{r} = \frac{\cos(\psi')}{\cos(\beta' - \psi')}$$

Kihasználva, hogy *π/2–(β–ψ) és π/2–(β'–ψ')* kiegészítő szögek, ezért sinusuk megegyezik, továbbá összevonva és rendezve:

$$\frac{r}{R}\cos(\psi) + \left(1 - \frac{r}{R}\right)\cos(\beta - \psi) = \cos(\psi)$$

A $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ helyettesítés, és néhány egyszerűsítő lépés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\psi'^2 = \left(\frac{R}{r} - 1\right) \cdot \beta \cdot (2\psi - \beta) + \psi^2$$

Amennyiben a sugárarány nagy, azaz *c*→∞, *R/r* mellett az *1* elhanyagolható, így a következő egyenletet kapjuk, ami *ψ'*-nek *ψ*-től való függése:

$$\psi'^2 = \frac{R}{r} \cdot \beta \cdot (2\psi - \beta) + \psi^2$$

Mivel $0 \le \beta < 2\psi$, a zárójelben lévő mennyiség pozitív, ezért a nagyobb ívről a kisebbre váltásnál $\psi \le \psi'$. Amennyiben a nagy íven történő utolsó pattanás nem éppen az ívek érintkezési pontjánál történik ($\beta \ne 0$), a növekmény a sugáraránnyal arányos, tehát *ψ* jelentős mértékben megnő.

A kis ívről a nagyra történő mozgást hasonló gondolatmenet alapján közelíthetjük meg. Az első lépéseket átugorva és kicsit másképp rendezve, *ψ''*-re ezt kapjuk:

$$\psi''^2 = \psi^2 - \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \beta \cdot (2\psi - \beta)$$

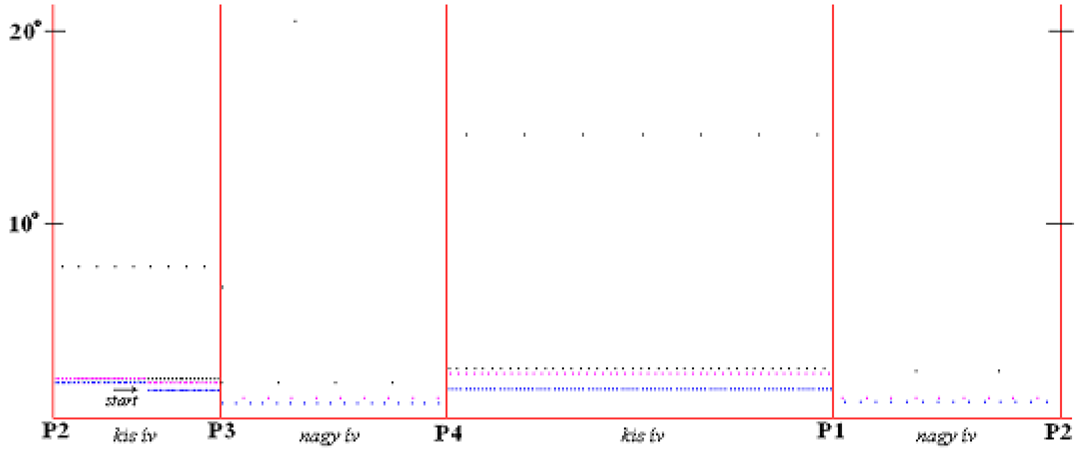
Amennyiben a *c* elég nagy, az *r/R* elhanyagolható, így kapjuk a kis ívről a nagyra váltás során történő szögváltozást:

$$\psi''^2 = \psi^2 - \beta \cdot (2\psi - \beta)$$

Mivel $0 \le \beta < 2\psi$, a zárójelben lévő mennyiség pozitív, azaz a nagyobb ívről a kisebbre történő váltásnál $\psi \ge \psi''$. Ha $\beta \ne 0$, akkor ez mindenképp csökkenést jelent.

Tehát a nagy→kicsi váltásnál a trajektória és az ütközési pontban húzott érintő által bezárt szög nagy valószínűséggel a sugáraránytól függő mértékben nő, míg kis→nagy váltásnál ez a szög a sugáraránytól függetlenül valószínűleg csökken. Vegyük viszont észre, hogy ez a csökkenés a sugáraránytól független, míg a növekmény mértéke a sugáraránnyal arányosan egyre nagyobb. Összességében – a két effektus versenyét tekintve – a növekedés mindenképp lekörözi a csökkenést. Az általam vizsgált tökhöz közeli tartományban, ahol *c* elég nagy, ez viszonylag gyorsan történik.

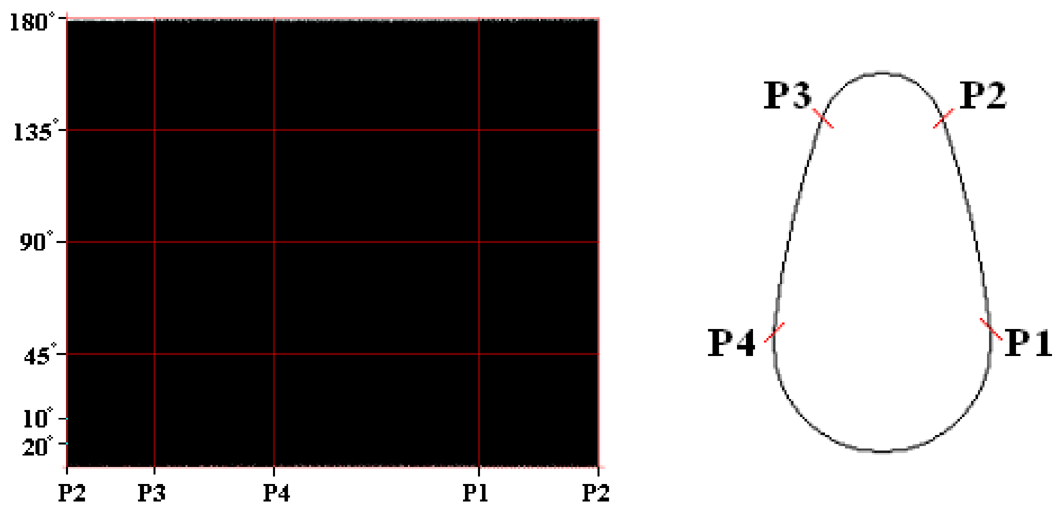
A számolásokat szimulációs eredmények is igazolják (pl. 18. ábra).



17. ábra A különböző színek mind ugyanannak a trajektóriának egy-egy „periódusát" ábrázolják. A pálya érintővel bezárt szöge kezdetben 1° volt (a geometria b=0,56; c=10). A vízszintes tengelyen a kerületi paraméter látható, ami az íveken mért távolság, azaz ívhossz, és nem közvetlenül a β szög.

Az ábrán is látszik, hogy egy tipikus surranó-pálya szöge a kis ívről nagy ívre történő váltás során csökken, és ezzel együtt kevesebbet is fog pattanni az adott nagy íven. Majd nagy ívről kis ívre váltásnál a szög nő, de ezért többször fog a kis ívvel ütközni. Ezután a pálya újabb nagy ívre tér át, ami újabb szögnövekedéssel jár. A két átmenet hatásának különbsége először akkor tűnik szembe, mikor először ér a kiindulás helyének közelébe. Ezt a különbséget jól érzékeltetik a kapott szögek a 18. ábra P4P1 szakaszán, ahol az első és a negyedik áthaladás lényegesen eltérő szögekkel történik.

Az alábbi ábrán pedig a fázisportré látható, ugyanannál a geometriánál, mint amit a 18. ábra elkészítésénél használtam, illetve a hozzá tartozó geometria vázlata. Látható, hogy a biliárd még viszonylag távol van a tök határesettől, viszont a fázisteret már a trajektória bejárja (az előző ábra pályáját folytattam 30 millió iterációs lépéssel, ez látható alább).



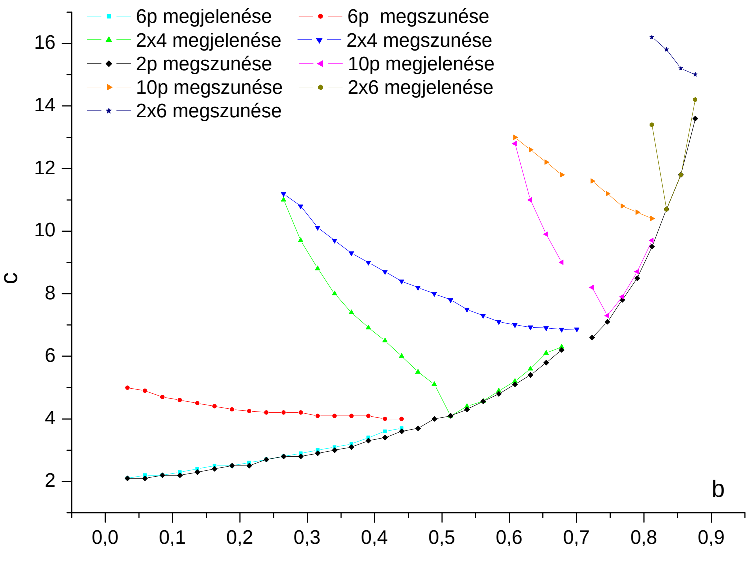
18. ábra Fázisportré és a geometria vázlata b=0,56; c=10

IV. 3. Egyszerű szigetsors

A kettőperiódusú pálya megszűnése, és a P4P1 ív félkörnél nagyobbra növekedése utáni tartományt tovább vizsgálva, több hasonlóságot vettem észre a szigetek viselkedésében, a két paraméter függvényében. Belátható, hogy a szigetek egy-egy periodikus pálya körül jönnek létre. Viszont az nem egyértelmű, hogy mely periodikus pályák körül alakulnak ki és mások körül miért nem.

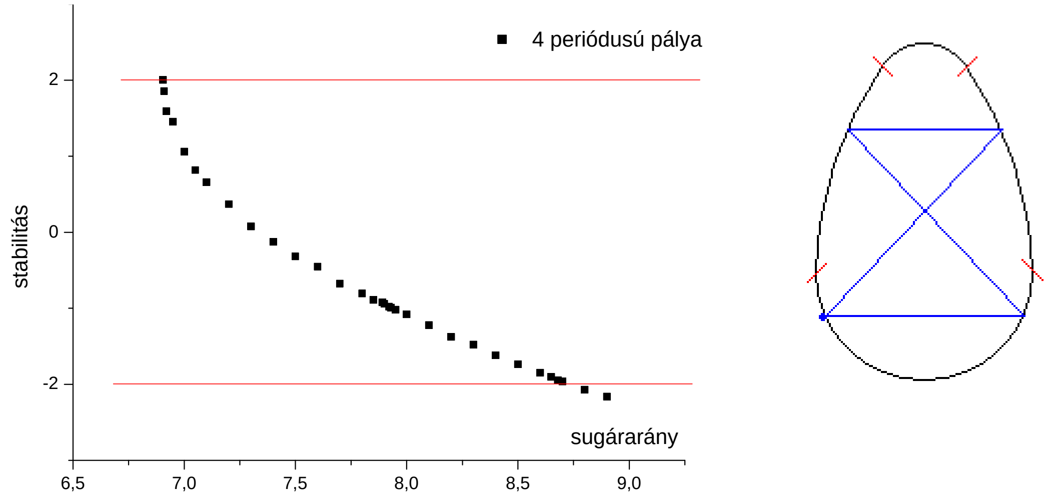
A *(b,c)* tér több (összesen körül-belül 9 ezer) pontjában 10 millió pontból álló fázisképeket készítettem, ugyanazokkal a kezdeti feltételekkel, mintegy feltérképezve a teljes paraméterteret. Az általános geometriákhoz tartozó fázisportré bonyolult, számos szigetet és akár több kaotikus tengert is tartalmaz. Ha viszont a P4P1 ív félkörnél nagyobb, a fázisportré mindig csak egy kaotikus tengerből és a benne lévő kevés szigetből áll. A *(b,c)* paramétertér ezen tartománya praktikusnak bizonyult a szigetek kialakulásához szükséges körülmények megfigyelésére.

Egy-egy sziget méret- és alakbeli változását vizsgáltam *b*, és *c* függvényében. Adott *b* mellett *c*-t növelve, általában a sziget mérete nőtt is meg csökkent is. Hasonló a viselkedés adott *c* mellett *b*-t változtatva. Fontos megjegyezni, hogy több különböző típusú pályának lehet egyező periódusa, ezért a körülöttük kialakuló szigetek különbözőképp fejlődhetnek. Feljegyeztem, hogy az egyes szigetek milyen paraméter-pároknál jelennek meg, vagy tűnnek el. Ezek az adatok grafikonon megjelenítve láthatók alább, a nagyobb szigetekre.



19. ábra A nagyobb szigetek megjelenése és eltűnése b és c függvényében

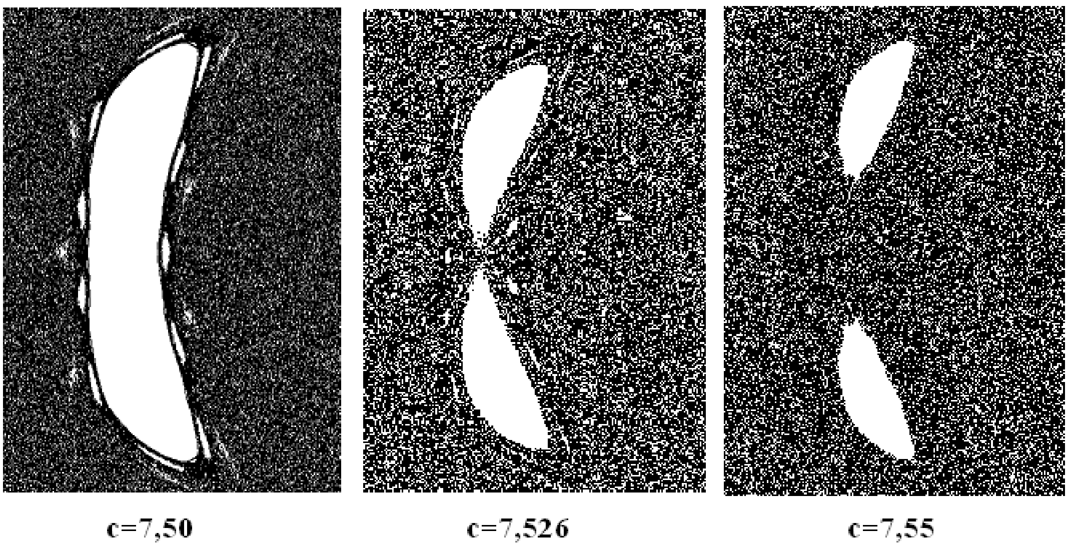
A méretbeli ingadozás és a megjelenés/eltűnés jelenségeinek megértését a már korábban említett stabilitás-számoló algoritmus segítette elő. Méréseket végeztem a szigetek közepét adó periodikus pálya stabilitására vonatkozóan mind b, mind c függvényében. Egy konkrét sziget stabilitási tulajdonságait mutatja be a 21. ábra, melyen a ±2 értékek a stabil és instabil jelleget választják külön. A görbének azért nincs folytatása, mert az adott típusú pálya az ábrázolt tartományon kívül nem létezik. Tapasztalataim azt mutatják, hogy a sziget kialakulásához nem elég, hogy létezzen egy periodikus pálya, hanem annak stabilitása is szükséges. Amennyiben a záródó trajektória instabil, nem alakul ki körülötte sziget.



20. ábra A 4 periódusú sziget közepét adó periodikus pálya stabilitásának változása és a trajektória vázlata

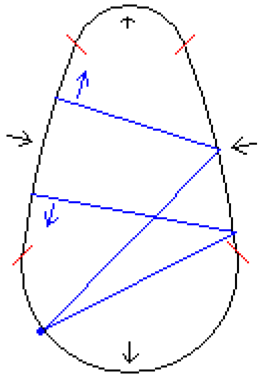
Az ábrán látható, hogy a sziget közepét adó periodikus pálya stabilitását még a sziget megszűnése után is lehet ellenőrizni. Tehát a pálya még mindig létezik, viszont instabilitása miatt már nem található körülötte integrálható tartomány. A sziget ilyen jellegű megszűnése/születése tehát a periodikus pálya stabilitására vezethető vissza.

A szigetek többféleképpen szűnhetnek meg, illetve születhetnek. A fázisképen nemcsak egyszerűen megjelenhetnek/eltűnhetnek, hanem össze is olvadhatnak több szigetből, és szétszakadhatnak más szigetekké. Ahhoz, hogy tisztábban láthassunk, a sziget periódusának többszöröse alatt záródó pályák stabilitását volt érdemes nyomon követni. A méréseket tehát azzal egészítettem ki, hogy összeolvadás előtti szigetek közepének, illetve az összeolvadt sziget közepének stabilitását egyszerre vizsgáltam. Ez praktikusan azt jelenti, hogy numerikusan, vagy a vázlat segítségével minden mérésnél meg kell keresni ezeket a pályákat, mert a szétszakadt szigetek nem tartalmazzák az összeolvadt sziget közepét, illetve az összeolvadt szigeteknek nem jellegzetes pontja a szétszakadás utáni szigetek középpontja. Egy tipikus szétszakadást mutat be a 22. ábra, ahol nem a sziget belső szerkezetét ábrázoltam, hanem a körülötte lévő kaotikus tengert.



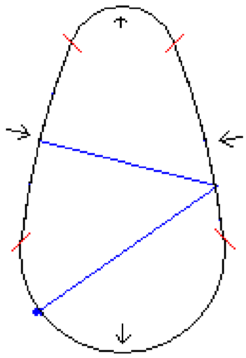
21. ábra A szétszakadást elvékonyodás előzi meg

A szétszakadt szigetek közepét adó pálya periódusa az összeolvadt sziget periódusának többszöröse (a 22. ábra esetében duplája). Ez a sziget viszont már a pálya geometriai ellehetetlenülése miatt szűnik meg. A 23. ábrán a sziget közepéhez tartozó trajektória megváltozását szemléltetem a sugárarány növelésével. A nagy ívek egyenesedni kezdenek, míg a kisebb ívek sugara nő. Jól látszik, hogy a pálya előbb-utóbb eléri az egyik szingularitást, és azon áthaladva már másképpen fog visszaverődni. Így legalábbis nem ugyanannyi pattanás után fog visszatérni a kiinduló pozícióba. A sziget ilyen megszűnését geometriai megszűnésnek nevezem, mert a sziget közepét adó periodikus pálya, még akkor is ha stabil lenne, geometriai okokból szűnik meg, ezáltal a szigetet is eltűntetve.



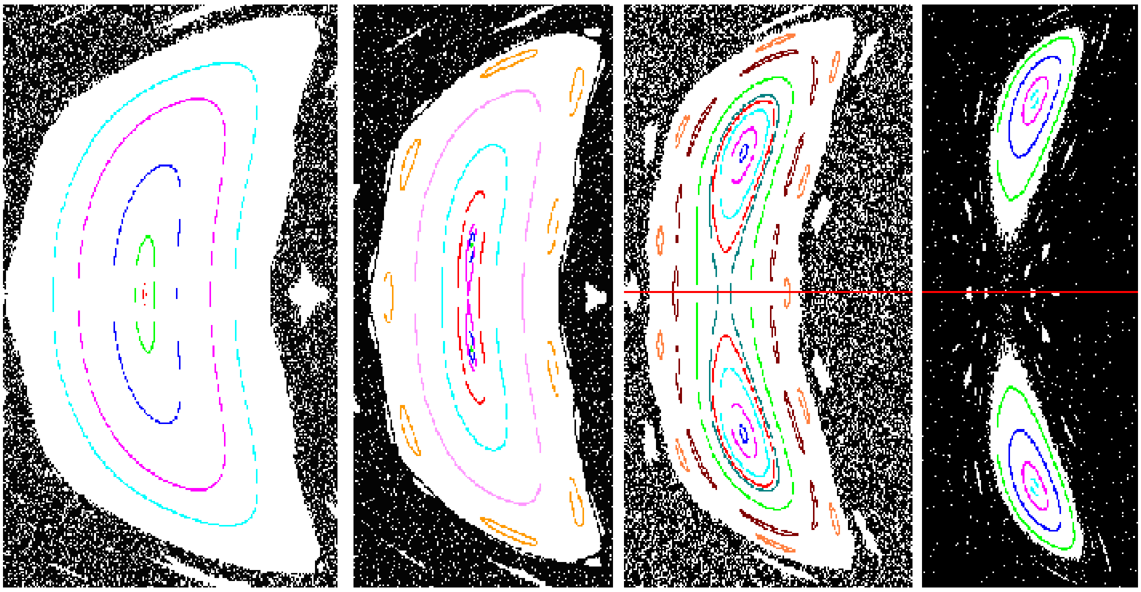
22. ábra A periodikus pálya megváltozása c növelésére

A szétszakadás folyamata a következő: A sugárarány növelésével a periodikus pálya egy kis perturbációja is stabillá válik, viszont a *c* növelésére másként reagál, mint az eredeti pálya. A 23. ábrán szereplő pálya például a 24. ábra pályájának kis perturbációja, ami viszont c növelésére csak a stabilitását veszíti el, geometriája lényegében változatlan marad. Tehát a szigeten belül a középpont több pontra esik szét, amelyek a sugárarány növelésével távolodni kezdenek az eredeti középponttól, ami ezzel párhuzamosan elveszíti a stabilitását (a sziget ilyen jellegű vizsgálatáról a 26. ábra számol be). Ahhoz, azonban hogy a sziget teljesen szétszakadjon ez még nem elég.



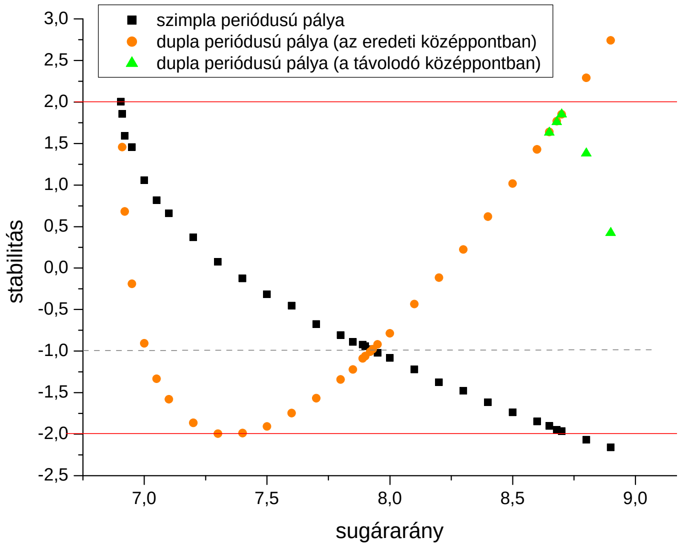
23. ábra A pálya érzéketlen c növelésére

A belső szerkezet változásának vizsgálata világított rá, hogy a szigeten belül fokozatos átalakulás megy végbe (25. ábra). Az eredeti középpont instabillá válása még nem szünteti meg a régi, koncentrikus belső szerkezetet, csak a középpont környezete alakul át. A szétszakadás az eredeti struktúra megszűnése után következik be.



24. ábra A sziget elvékonyodása a régi szerkezet fokozatos eltűnését jelenti

A sziget stabilitási viszonyai az alábbi ábrán láthatóak. Látható, hogy az új stabil középpontok és az eredeti középpont stabilitása ellentétes irányban változik, amint a távolodás elkezdődik.



25. ábra A sziget periodikus pályáinak stabilitása a sugárarány függvényében, adott b mellett

A szigetek méretének változásában van egy nehezen interpretálható jelenség. Bizonyos *(b,c)* paraméter-pároknál az adott sziget mérete, a közeli geometriákhoz képest drasztikusan csökken. A jelenség általános, számos szigetnél megfigyelhető. Tapasztalataim alapján mindig a sziget közepének $s=-1$ stabilitási értékénél történik. Mégsem nyilvánvaló, hogy miért zsugorodik le hirtelen. (Nem kizárt, hogy a forgatási szám irracionalitásával összefüggésbe hozható a jelenség. A kérdést nem vizsgáltam közelebbről.)

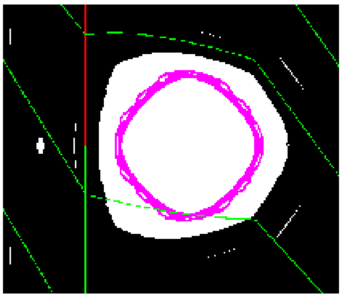
IV. 4. További érdekes jelenségek

A következő néhány jelenséget nem vizsgáltam közelebbről, ezért csak ismeretterjesztő jelleggel közlöm őket. A szimulációs program alkalmas ilyen irányú további kutatások elvégzésére, magyarázatok keresésére.

Az általam vizsgált tartományban viszonylag kevés sziget van, sőt gyakran előfordul, hogy egyfajta szigetcsoport létezik adott geometriánál. A szigetek megszűnése és más szigetek keletkezése néha át sem fed. A paramétertér ezekben a pozitív mértékű részeiben ergodikus viselkedés feltételezhető.

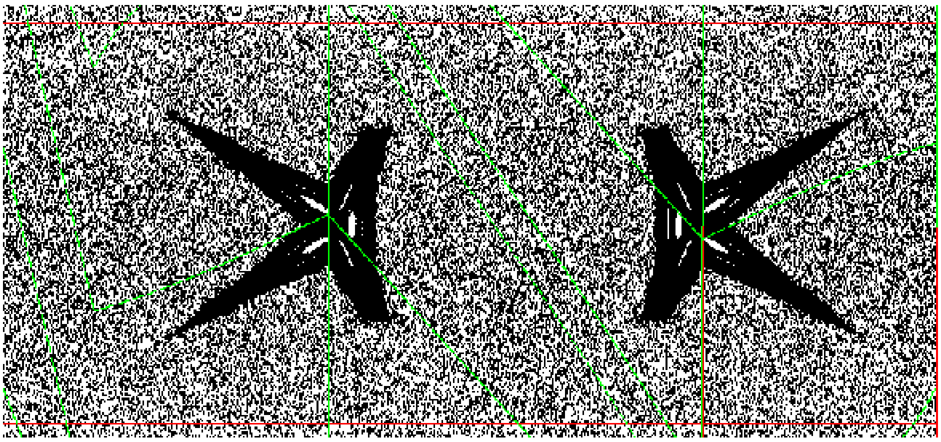
A kettőperiódusú sziget általában több szigetre bomlik, amelyek mind egy periodikus pálya körül alakulnak ki. Azaz a kettő periódusú stabil pálya nagyobb periódusú stabil pályává alakul át. A geometria alapja (általában trapéz), minél jobban hasonlít a négyzetre, azaz *b* minél közelebb van *1*-hez, annál nagyobb ez a periódus, és annál érzékenyebb *c* változtatására.

Előfordulhat, hogy egy-egy sziget olyan nagyra nő, hogy egyes részei átlépik a szingularitásokat. A sziget belső szerkezete ilyenkor átalakul. Azok a trajektóriák, amelyek átlépik a sarkokat, általában kaotikus sávot alkotnak (lásd 26. ábra, ahol a zöld vonal pontjai az egyik sarokba történő pattanást jelölik). Mindazonáltal minél kisebb mértékben lóg túl a szingularitásokon, annál kevesebb, és keskenyebb ilyen sávot tartalmaz a sziget. Bár ritka az ilyen szembetűnő jelenség, minden olyan szigetben megfigyeltem, ami elég nagy, hogy ilyen pályákat is tartalmazzon.



26. ábra A sziget kevert belső szerkezetű is lehet

Bizonyos geometriáknál a fázistérnek létezik egy olyan tartománya, amiből indítva a trajektória nagyon hosszú ideig tartózkodik, mintha nehezen tudna kitörni belőle. Ha viszont a tartományon kívülről indítjuk a pályát, abba csak ritkán tör be.



27. ábra Csapda-jelenség: a trajektória lényegesen sűrűbben pattan a fázistér egy bizonyos tartományában, mint annak bármely más, ekkora területén (az ábra $5*10^5$ pontból áll)

V. Összefoglalás

TDK munkámban a kevert fázistér tulajdonságait kutattam konvex biliárdokban. Ehhez egy olyan modellt hoztam létre, amely a témában publikált cikkek néhány eredményét összefogja. Ez a kétparaméteres család a Benettin-Strelcyn-féle kör-stadion átmenet általánosítása. Ezzel egy folytonosan transzformálható geometriát kapunk, amiben a dinamika a két paramétertől függően integrálható, kevert, vagy teljesen ergodikus lehet. Az általánosítás egy jelenségekben gazdag, jól vizsgálható, új tartományt is feltárt. Dolgozatomban ennek a tartománynak a tanulmányozásával foglalkozom.

Először is egy jól használható, praktikus szimulációs eszközt fejlesztettem a vizsgálatokhoz, ami a publikált jelenségeket nagy pontossággal visszaadta. A vizsgálat célja, hogy a kevert fázistér változásának törvényszerűségeiről teljesebb képet kapjak. Szimulációim több újszerű jelenségre hívják fel a figyelmet, de ezek közül az ergodicitás kialakulásának körülményeire koncentráltam

Numerikus eredményeim és heurisztikus érvelésem alapján úgy vélem, ergodikus viselkedés tapasztalható a határesethez közeli pozitív mértékű tartományban. Amennyiben a visszapattanás szöge nem túl kicsi, a dinamika itt elég közel van a tök határeset dinamikájához, ami ergodikus. Viszont a kis szögben ütköző, a fal közelében maradó pályák szöge érvelésem szerint véges időn belül felnövekszik és kitör a határ közeléből. Tehát a folytonos átmenet során nem szükségszerű, hogy csak határesetben lássunk ergodicitást. Ez egy lényeges különbség a Benettin-Strelcyn esethez képest, ahol ez csak határesetben tapasztalható.

Fontos lépéseket tettem a kaotikus tengerben kialakuló szigetek kialakulásának megértése felé. A szigetek periodikus pályák környezetében alakulnak ki, és – vizsgálataim szerint – ehhez a periodikus pályának stabilnak is kell lennie. Ezen pályák természetesen az asztal geometriájának változtatásával eldeformálódnak, ami a stabilitásuk megváltozásával is jár. Nagyobb deformáció esetén pedig a periodikus pálya is torzulhat, elveszítheti periodicitását. Amennyiben a pálya stabil, körülötte sziget alakul ki. Ha azonban instabillá válik, a sziget is megszűnik. Továbbá a sziget megszűnését a periodikus pálya megszűnése is okozhatja. Azonban a periodikus trajektória át is alakulhat, periodusának többszöröződésével. Ha ez a pálya stabil, az eredeti sziget az új periódusnak megfelelő szigetekre szakadhat szét.

Végül néhány további jelenség bemutatásával igyekeztem érzékeltetni, hogy a biliárdcsalád tartogat még megválaszolatlan kérdéseket.

VI. Kitekintés – tervek

Terveim közt szerepel a vizsgálat folytatása és néhány magyarázat komolyabb megfogalmazása. Ezért a szimulációs környezet fejlesztése még mindig folyamatban van. Kísérleti jelleggel már Ljapunov-exponenst is számol. Amennyiben elkészül, ez az eredményeket és magyarázatokat kézzelfoghatóbbá teheti.

Az Hénon-Wisdom által elemzett kioltó-pályák szerepe a szimulációim alapján nem igazolt. A kioltó-pályáknak megfelelő kezdeti feltételből indítva első ránézésre tényleg folytonos görbét kaptam, viszont ránagyítva apró szigeteket láttam egymáshoz nagyon közel. Hogy egy-egy ergodikus komponenst ilyen sziget-rendszer határol nem csak az általuk említett esetekben tapasztaltam, hanem a szigetek szélén is gyakran láthatunk ilyeneket. A program lehetőséget nyújt ennek tisztázására is.

Potenciált látok a kevert fázistér további vizsgálatára és az eredményeim általánosítására más geometriákban is. A napjainkban élénken kutatott az ún. gomba-biliárd, ahol az integrálható és az ergodikus viselkedést mesterkélten keverik a szerzők. Ettől eltérően az eddigi különböző, természetes geometriákban elért eredmények összekapcsolását tartom fontosnak. Esetleg a biliárd szimmetriáinak hatását vizsgálnám, kevesebb szimmetriával rendelkező geometria folytonos áttranszformálásával nagyobb szimmetrájú rendszerré.

VII. Felhasznált irodalom

1. S. Tabachnikov: Billiards, ``Panoramas et Syntheses'', Soc. Math. France, 1995

2. N. Chernov - R. Markarian: Chaotic billiards, to be published in the Mathematical Surveys and Mongoraphs of the AMS

3. G. Benettin and J.-M. Strelcyn. Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: Stochastic transition and entropy. *Phys. Rev. A*, 17(2):773–785, 1978.

4. L. A. Bunimovich, On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards, Comm. Math. Phys. 65, 295-312, 1979

5. M. Hénon - J. Wisdom: The benettin-strelcyn oval billiard revisited (*Physica 8D* (1983) 157-169)

6. V. Donnay, Elliptic island in generalized Sinai billiards, Ergodic Theory and Dyn. Sys. 16. (1997) no 5, 975-1010

7. Szász Domokos, Dinamikai rendszerek, 10. fejezet http://www.renyi.hu/~szasz/dynsys/dr10.ps

8. N. Chernov, H. K. Zhang: Billiards with polynomial mixing rates, Nonlinearity, 18 (2005) 1527-1553