Valószínűségszámítás
8. feladatsor
Eloszlások (folyt.): valószínűségi változók függvényei

8.1 X Poisson eloszlású valószínűségi változó, λ paraméterrel. Írjuk fel az $Y := 2X + 1$ valószínűségi változó eloszlását és számítsuk ki az $\mathbf{E}(Y)$ várható értéket és a $\mathbf{Var}(Y)$ szórásnégyzetet.

8.2 Legyen X a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg az $Y := X^{-1}$ és a $Z := X(1+X)^{-1}$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényét és sűrűségfügvényét.

8.3 Legyen X standard normális eloszlású valószínűségi változó. (Azaz X normális eloszlású, amelynek várható értéke 0, szórásnégyzete 1.) Határozzuk meg az $Y := 2 + |X|$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.

8.4 Legyen X $N(m, \sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változó ($\mathbf{E}(X) = m$, $\mathbf{Var}(X) = \sigma^2$). Határozzuk meg az $Y := e^X$ *log-normális* eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.

8.5 Legyen X *folytonos* eloszlású valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye $F(x)$.
(a) Határozzuk meg az $Y := F(X)$ és a $Z := -\log(F(X))$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényét.
(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $G : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eloszlásfüggvény és $G^{-1} : [0, 1] \to \mathbb{R}$-et a következő képpen értelmezzük: $G^{-1}(u) := \sup\{x \in \mathbb{R} : G(x) < u\}$, akkor az $Y := G^{-1}(F(X))$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye pontosan G.

8.6 Legyen X egy valószínűségi változó amelyre $\mathbf{P}(X = 0) = 0$, és $Y := X^{-1}$. Mi a feltétele annak, hogy X és Y azonos eloszlásúak legyenek?

8.7 Legyen X $LN(m,\sigma)$ log-normális eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) := 1\!\!1_{(0,\infty)}(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left\{\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

(a) Bizonyítsuk be (lehetőleg számolás nélkül), hogy ha $C > 0$ és $\alpha \neq 0$ rögzített konstansok, akkor a $Y := CX^\alpha$ valószínűségi változó szintén log-normális eloszlású, melynek papraméterei $m' = \alpha m + \log C$ és $\sigma' = \alpha\sigma$.

(b) Valamely homokfajta részecskéi gömb alakúak, melyeknek átmérője (milliméterben mérve) log-normális eloszlású, $m = -0.5$ és $\sigma := 0.3$ paraméterekkel. Az egész homokmennyiség hány *súlyszázaléka* áll 0.5 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsékből?

8.8 Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-(x-m)^2/2} + e^{-(x+m)^2/2}\right).$$

(Ez azt jelenti, hogy $X = Y + Z$, ahol Y és Z független valószínűségi változók, $\mathbf{P}(Y = \pm m) = 1/2$ és Z standard normális eloszlású.) Vizsgáljuk meg, hogy m mely értékeire lesz a fenti sűrűségfüggvény unimodális (azaz: egy maximum pontú.)

8.9 A következő feladatokban adott a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ill. sűrűségfüggvénye. Meg kell határozni az ξ függvényeként értelmezett X, Y, Z, ... valószínűségi változók sűrűségfüggvényét

(a) ξ egyenletes eloszlású a $[-1,1]$ intervallumban; $X := \xi^2$, $Y := \xi^3$, $Z := \tan(\frac{\pi}{2}\xi)$, $U := \sin(\pi\xi)$.

(b) ξ exponenciális eloszlású λ paraméterrel; $X := 3\xi + 2$, $Y := \xi^2$, $Z := \sqrt{\xi}$.

(c) ξ standard normális eloszlású; $X := \xi^2$, $Y := \xi^{-2}$.

8.10 Bizonyítsuk be, hogy ha ξ Cauchy eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, és $X := 1/\xi$, $Y := 2\xi/(1-\xi^2)$, $Z := (3\xi - \xi^3)/(1-3\xi^2)$, akkor X, Y és Z szintén Cauchy eloszlású.

Útmutatás: Használjuk a következő trigonometriai azonosságokat: ha $\xi = \tan(\alpha)$, akkor $1/\xi = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, $= 2\xi/(1-\xi^2) = \tan(2\alpha)$ és $(3\xi - \xi^3)/(1-3\xi^2) = \tan(3\alpha)$

8.11 Egy $\mathbb{N}$-értékű X valószínűségi változó k-adik *faktoriális momentuma* $\mathbf{E}\big(X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)\big)$. Sok esetben a faktoriális momentumokat könnyebb kiszámolni, mint a momentumokat. De nyilvánvaló, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re a k-adik momentum kifejezhető az első k faktoriális momentum segítségével. Számoljuk ki a binomiális-, Poisson- és geometriai eloszlások faktoriális momentumait. (Adjunk zárt kifejezést tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re.)

8.12 Számoljuk ki az $E(-1,1)$, $N(0,\sigma)$, $\mathrm{EXP}(\lambda)$, $LN(m,\sigma)$ eloszlások momentumait. (Adjunk zárt formulát $k \in \mathbb{N}$-re.) Kommentáljuk a momentumok aszimptotikus viselkedését mikor $k \to \infty$.

8.13 Legyen X standard Cauchy eloszlású, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{E}(|X|) = \infty$, de bármely $\varepsilon > 0$-ra $\mathbf{E}(|X|^{1-\varepsilon}) < \infty$. Számoljuk ki a $\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon\mathbf{E}(|X|^{1-\varepsilon})\right\}$ határértéket (ha egyáltalán létezik ...).

8.14 Legyen X_λ Poissonn eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke $\mathbf{E}(X_\lambda) = \lambda$. Számoljuk ki az $Y_\lambda := \sqrt{X_\lambda}$ valószínűségi változó szórásának határértékét, amint $\lambda \to \infty$.

8.15 Egy $\mathbb{N}$-értékű X valószínűségi változó *generátor függvénye* $g_X : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g_X(z) := \mathbf{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(X = k)$. (A generátrofüggvény analitikusan kiterjeszthető a komplex sík $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ nyílt egységkörére.) Számoljuk ki a binomiális, Poisson- és geometriai eloszlások generátorfüggvényét.

8.16 Egy tetszőleges X valószínűségi változó *karakterisztikus függvénye* $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi_X(t) := \mathbf{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x)$. (Az integrál abszolút konvergens – ergo: a karakterisztikus függvény jól értelmezett – bármely valószínűségi változóra!) Számoljuk ki a $BIN(p,n)$, $POI(\lambda)$, $GEO(p)$, $E(a,b)$, $N(m,\sigma)$, $EXP(\lambda)$, $CAU(m,b)$ eloszlások karakterisztikus függvényét.