

Sorok

Hatvány-sorok, speciálisan Taylor-sorok

Taylor-polinom és maradék tag speciálisan használata függvények értékének kiszámítására egy pontban (hibával), a függvény meg lehet adva akár differenciálegyenlettel, akár integrál függvényként

1. Legyen f megoldása az $f'(x) = f(x)^2 + x^2$ és $f(1) = 0$ Cauchy problémának. Becsüljük meg f értékét az $x = 1.1$ pontban f harmad rendű Taylor-polinomja segítségével!
2. Legyen $x \rightarrow y(x)$ a megoldása az $y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \arctan(\sqrt{\pi}x + y)$, $y(0) = 1$ Cauchy problémának. Becsüljük meg az $y(0,1)$ értékét y elsőrendű Taylor polinomja segítségével, illetve a Lagrange (hibatagra vonatkozó) tételét használva adjunk felső korlátot a becslés hibájára!
3. Az $x \rightarrow y(x)$ függvény kielégítő az $y' = \sin(y) + x^3$ differenciálegyenletet és az $y(1) = \frac{\pi}{6}$ kezdeti feltételt. Egy másodrendű Taylor-polinom segítségével adjunk becslést y értékére az $x = 1.1$ pontban továbbá adjunk felső korlátot a becslés hibájára.
4. Melyik lehet és melyik biztosan nem lehet a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(2x+4)^{2n}$ hatványsor x -re vonatkozó konvergencia tartománya az alábbi 4 közül: \emptyset , $[-5, 5]$, \mathbb{Z} , $(-5, 1]$. A válaszokat indokoljuk!
5. Az $x = 1$ pontban akarjuk egy függvény értékét megbecsülni a függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-polinomjának segítségével. Írjuk fel a kérdéses polinomot, ha
 - i) a függvény a $t \rightarrow \sqrt[3]{1000+t^2}$, és azt szeretnénk hogy a hiba biztosan kisebb legyen, mint 10^{-9} ;
 - ii) a függvény a $t \rightarrow e^t$, és azt szeretnénk hogy a hiba biztosan kisebb legyen, mint 10^{-3} .
6. Az $x \rightarrow y(x)$ függvény kielégíti az $y' = \sin(x+y)$ differenciálegyenletet és az $y(\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{12}$ kezdeti feltételt. Egy másodrendű Taylor-polinom segítségével adjunk becslést y értékére az $x = 0$ pontban továbbá adjunk felső korlátot a becslés hibájára.
7. Mennyi $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$, ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n = \ln(x)$ az $x_0 = 2$ egy környezetében?
8. Határozzuk meg az x -re vonatkozó x_0 bázis-pont és R konvergencia sugarat a $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{n-5}{n+3})^{n^2} x^{2n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (3x+1)^n$ hatványsorok esetében!
9. Számoljuk ki a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(n+2)}$ sor értékét!
Segítség: először vizsgáljuk az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}/(n!(n+2))$ hatványsort és állapítsuk meg az összegkép-letét!