A2 — 8-9. gyakorlat — 2014/2015/1

Tétel Ha $f(x)$ függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható az $[x_0, x]$-en, akkor az f függvény n-ed fokú Taylor polinomja x_0 bázispont körül:

$$T_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

és a hiba becsülhető, azaz létezik $\xi \in [x_0, x]$ úgy hogy

$$f - T_{f,x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

1. Határozzuk meg a következő függvények $x_0 = 0$ körüli 2-od fokú Taylor polinomát! Adjunk becslést $f(1)$-re, mekkora lehet a hiba?
   a) $f(x) = \cos(x^2)$
   b) $f(x) = e^{-2x^2}$
   c) $f(x) = arctg(2x)$
   d) $f(x) = \frac{3}{8+x^3}$
   e) $f(x) = \sin^2(x)$
   f) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
   g) $f(x) = \sqrt[3]{1-2x^2}$
   h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{27-x}}$
2. Írjuk fel a $\sin(x)$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{6}$-hoz tartozó 3-ad fokú Taylor polinomot. Határozuk meg a maradéktagot!
3. Írjuk fel a $\cos(x)$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{2}$-hoz tartozó 3-ad fokú Taylor polinomot. Határozuk meg a maradéktagot!
4. Számítsuk $\sqrt{102}$-t legfeljebb $0,01$ hibával!
5. Számítsuk ki $e^{0,1}$-t legfeljebb $0,001$ hibával!
6. Számítsuk ki $\cos(0,2)$-t 2 tizedesjegy pontossággal!
7. Adjuk meg az $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} dx$ integrál értékét $0,01$ pontossággal
8. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor $\operatorname{sh}(x) > x + \frac{x^3}{3!}$
9. Adjunk a következő differenciál egyenletekre és kezdeti érték feladatokra közelítő megoldást! (4-ed fokút)
   a) $y' = y - x^2 + 2x$, $y(0) = 0$
   b) $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 1$
   c) $y' = \cos^2(y+1)$, $y(0) = 1$
   d) $y' = e^{x^2} y$, $y(0) = 1$
10. Becsüljük meg $y(0,1)$-et, ha $y(x)$ megoldása az $y' = \cos(y + x^2)$ differenciál egyenletnek az $y(0) = 0$ kezdeti érték feltétellel. Mekkora legfeljebb a hiba?
    Becsüljük meg $y(0,1)$-et úgy, hogy a hiba legfeljebb $0,01$ legyen!