Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) 2. gyakorlat

1. *Egyenletrendszer megoldásának felírása blokkmátrixokkal* Tegyük fel, hogy az r rangú $\mathbf{A}$ mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopcserékkel mindig elérhető. Jelölje $\mathbf{B}_r$ az $\mathbf{A}$ első r oszlopából álló mátrixot, és legyen az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} & \mathbf{d}_r \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{d}_r$ egy r-dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s$$

ahol s a szabad változók száma, azaz $s = n - r$, és $\mathbf{t}_s$ a szabad paraméterek vektora, ráadásul $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ és $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

2. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrixok invertálhatók, és

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

illetve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

ahol $\mathbf{B}$ tetszőleges, de megfelelő típusú mátrix. Hasonlóan, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik. Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,1,2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7,3,3),(8,1,2),(4,4,3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (3,2,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!

4. Legyen A egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az A^i rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \dots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal? *(a)* $(5,6,\dots)$, *(b)* $(9,8,7,\dots,4,4\dots)$, *(c)* $(10,9,8,\dots)$, *(d)* $(8,5,\dots)$.

5. Legyen $\mathbf{a} = (-1,-2,-3)$, $\mathbf{b} = (-1,2,3)$. Határozzuk meg az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}\mathbf{b}^T\mathbf{x}$ leképezés kép- és magterét!

6. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,-1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (2,-1,3)$, és

(i) $\mathbf{w}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{w}_2 = (1,1,1)$, $\mathbf{w}_3 = (1,1,2)$;
(ii) $\mathbf{w}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{w}_2 = (1,1,1)$, $\mathbf{w}_3 = (3,1,5)$;
(iii) $\mathbf{w}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{w}_2 = (1,1,1)$, $\mathbf{w}_3 = (2,1,3)$;

Írjuk fel e leképezés mátrixát!

7. Mibe viszi az $xy + z = 0$ felületet az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

8. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:

(a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;
(b) $f : (x,y,z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$ a standard, illetve az $\{(1,1,0),(0,1,0),(2,1,1)\}$ bázisban;
(c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1,2),(-2,1)\}$ bázisban;
(d) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített altérre a standard bázisban;
(e) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;
(f) $\mathbb{R}^n$ tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

9. Határozzuk meg a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok LU-felbontását, majd ezt fölhasználva

1. oldjuk meg a $\mathbf{Px} = (0,2,4,6)$ egyenletrendszert,
2. invertáljuk az $\mathbf{R}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. A Gram–Schmidt-ortogonalizációval keressünk ortogonális és ortonormált bázist

(a) $\mathbb{R}^3$-ben a $\{(2,0,1),(1,1,1),(1,2,3)\}$ bázisból kiindulva,
(b) $\mathbb{R}^4$-nek a $(0,2,1,0)$, $(1,-1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,2,0,-1)$ vektorok által kifeszített alterében.

HF. Az LU-felbontásnak több változatát használják.

1. Az egyik az LDU-felbontás, ahol az $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$ szorzatban $\mathbf{D}$ diagonális mátrix, továbbá $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ főátlójában is csupa 1-es szerepel. Megmutatható, hogy ha $\mathbf{A}$-nak van LU-felbontása, akkor az LDU-felbontás egyértelmű. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 10 \\ 2 & 4 & 11 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

LDU-felbontását!

2. A másik fontos változat a PLU-felbontás. Ezt akkor használjuk, ha az elimináció megakad, vagy azért, mert a következő oszlop első eleme 0, vagy mert numerikus okokból másik elemmel szeretnénk eliminálni, így egy sorcserére lenne szükség. E sorcseréket előre végrehajtva, az $\mathbf{A}$ olyan alakra hozható, melynek már van LU-felbontása. A sorcserék megvalósíthatók egy $\mathbf{P}$ permutációs mátrixszal való szorzással is (a permutációs mátrix minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-es van, a többi 0). Ekkor tehát $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, vagyis $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását, és igazoljuk, hogy ha $\mathbf{P}$ permutációs mátrix, akkor $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$.