10. Gyakorlat

1 c)

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{1}{1+x^n}$$

Milyen x-ekre konvergens $\frac{1}{1+x^n}$ $\forall$ kivétel $x \neq -1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \text{ha } |x|<1, & 1-1=0 \\ \text{ha } x=1, & 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ \text{ha } |x|>1, & 1-0=1 \end{cases} = f(x)$$

Mivel $f_n(x)$ folyt., csak olyan tart. lehet egyenletesen folyt, ahol $f(x)$ is folyt.

- $(-1,1)$-n egyenletesen folytonos?

$$\sup_{x\in(-1,1)} \Big| \underbrace{1 - \frac{1}{1+x^n}}_{f_n(x)} - \underbrace{0}_{f(x)} \Big| = \sup_{x\in(-1,1)} \left| 1 - \frac{1}{1+x^n} \right|$$

n páratlan: sup -1-ben ∞

n páros: sup 1-ben $1/2$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \infty, \tfrac{1}{2} \neq 0$$ tehát nem egy. k.

$-1, 1$- környékén nem lehet, hagyjuk ki! $\mu<1$, $[-\mu,\mu]$-n nézzük

$$\sup_{x\in[-\mu,\mu]} \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right)$$ ~~n páratlan sup $-\mu$-ben $1-\frac{1}{1-\mu^n}$ n páros~~

$1+x^n$ nem tud negatív lenni, tehát ott lesz a sup ahol $1+x^n$-nek van a sup-ja

$$\Rightarrow = 1 - \frac{1}{1+\mu^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow [-\mu,\mu]$-n egyenletesen konvergens

- $(1,\infty)$-t is hasonlóan kell vizsgálni ...

3 d) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2\right)^n$$ k $\Leftrightarrow$ $\left|\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2\right| < 1$, hiszen geom. sor

$$\left|\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2\right| < 1 \Leftrightarrow 1+x^2 > 1 \Leftrightarrow T \supseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$$ vagy $$\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}} = 0$$ tagú $\Uparrow$ $x=0$

$\Rightarrow T = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \text{ha } x=0, & 0 \\ \text{egyébként}, & x^2 \cdot \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} \end{cases}$$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{n^2-1}$ $\forall x$-re konv. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}\right) \cdot e^{-x}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ pedig kiszámolható parc. t. bontással, ezen A. K.

6

b) $\alpha = \limsup \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{n!} = \infty \Rightarrow T = \{0\}$-n konv.
$R = 0$

d) $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{n}} = 3$ (rendőrelvvel) $\Rightarrow T \approx \left(-1-1/3, -1+1/3\right)$
$R = 1/3$

$x = -1-1/3$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^n+2^n)}{n} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ Leibniz alterál ✓
$\frac{1+(2/3)^n}{n}$ mon. csökk, $\to 0$

$x = -1+1/3$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ D

$\Rightarrow T = \left[-1-1/3, -1+1/3\right)$

7 b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} x^n$, $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{3^{n+1}}} = 1/3 \Rightarrow R = 3$

$T \approx (-3, 3)$ $x = -3$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} \cdot (n+1)$ D $\left(\lim a_n = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}\right)$

$x = 3$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3}$ D $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha} K \Leftrightarrow \alpha > 1\right)$

$\Rightarrow T = (-3, 3)$ itt egy. k. is!

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n}}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}\right)' = \left(\frac{x}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)'$

$= \left(\frac{x}{3-x}\right)' = \frac{3-x+x}{(3-x)^2} = \frac{3}{(3-x)^2}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}$ $\alpha = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$ $T \approx (2, 4)$

$x=2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ K. (Leibniz) $x = 4$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ D $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha} K \Leftrightarrow \alpha > 1\right)$

$\Rightarrow T = [2, 4)$ csak a $(2,4)$-n bel. minden h egy. konv.!

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (y-3)^n dy = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (y-3)^n dy = \int_0^x \frac{1}{1-(y-3)} dy$

$= \int_0^x \frac{1}{4-y} dy = \left[-\ln|4-y|\right]_0^x = -\ln(4-x) + \ln 4 = \ln \frac{4}{4-x}$