2. gyakorlat

(1.) c) ~~1. módszer~~ Eldöntjük, lin. ftlen-e?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

~~$r(A) = 3$~~

$r(C) = 4$

$\Rightarrow$ lin. ftlenek, egyben gen. ják

$r(A) = O$ ($\Leftarrow$ oszlopok száma) $r(A) = S$ ($\Leftarrow$ sorok száma)

(Válasszunk 1. lin. őf-t) $\{(1,2,0)^T, (1,0,1)^T, (2,2,1)^T\}$

Határozzuk meg a rangot! Ha valódi altér, min. sz. v. hozzávétel-vel egészítsük ki, h az egészet gen-ja!

1. módszer: Eldöntjük mik lin. ftlenek?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r(A) = 2$$

v_1, v_2 lin. ftlen

Keressünk hozzá kiegészítést!

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. módszer Eldöntjük hány linftlen.? v_1, v_2, ε_3 lin. ftlen

(Tétel $\begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \vdots \\ \underline{v}_n^T \end{bmatrix} \underset{G.el.}{\sim} \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$, akkor $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & +1 \\ 0 & -2 & +1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{r(A) = 2}$$ (Van benne 2 lin. ftlen.)

Kiegészítő: 3. oszlopban nincs semmi csere: ε_3!

2/c) $A\underline{x}=\underline{c}$ mo-ható-e? $(r(A)=r(A|\underline{c}))$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 & -11 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ -2 & 6 & 1 & 0 & -14 \end{array}\right] \overset{S_4-S_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ & \vdots & & & \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ & \vdots & & & \end{array}\right) \overset{S_4 \leftrightarrow S_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ & & & & \end{array}\right]$$

S_2+S_1
S_3-2S_1
S_4-3S_1
S_5+2S_1

$r(A)=r(A|b)$ $(<\sigma \Rightarrow \infty^{db}$ mo$)$

$\boxed{c \in \mathcal{O}(A)}$

4/b) kiegészítőt keressünk (egyszerűbb ~~so~~ sorokként rakni)

$$\begin{bmatrix} c & 0 & -c & 1 \\ -c & 1 & 0 & c \\ 0 & c & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{S_2+S_1}{\sim} \begin{bmatrix} c & 0 & -c & 1 \\ 0 & 1 & -c & c+1 \\ 0 & c & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{S_3-c\cdot S_2}{\sim} \begin{bmatrix} c & 0 & -c & 1 \\ 0 & 1 & -c & c+1 \\ 0 & 0 & 1+c^2 & -c(c+1) \end{bmatrix}$$

$c \neq 0 \Rightarrow r(A)=3$ $\Rightarrow$ ε_4 lin. ftlen

$c=0 \Rightarrow r(A)=3$ S_1-et alulra rakva $\Rightarrow$ ε_1 lin. ftlen

Ha oszloponként állítjuk be $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ közül kivál. a lin. ftlen-t$)$

$$\begin{bmatrix} c & -c & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{S_4 \leftrightarrow S_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & -c-c^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c^3 & 0 & -c^2 & 0 & c \\ 0 & 0 & c^3+c^2 & 1 & c^2+c & 0 & -c \end{bmatrix}$$

$S_3+c\cdot S_1$
$S_4+c\cdot S_1$

$S_3-c^2\cdot S_2$
$S_4+(c^2+c)\cdot S_2$

$c=1 \Rightarrow$ $S_3 \leftrightarrow S_4$ $\Rightarrow$ ε_2 lin. ftlen

$c=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ε_1 lin. ftlen

$c \neq 0,1$ $S_4 - \frac{c^3+c^2}{1-c^3}\cdot S_3$ $\Rightarrow$ ε_1 lin. ftlen