5. gyakorlat

① a) $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3x-2y\\x+y\end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix}3&-2\\1&1\end{bmatrix}$ $(= T_{\mathcal{K}}$ kanon. b.-ban$)$

$\mathcal{F} = \left\{ f_1 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\ f_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \right\} \Rightarrow A_{\mathcal{K}\leftarrow\mathcal{F}} = \begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$

$T_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{K}}\, T_{\mathcal{K}}\, A_{\mathcal{K}\leftarrow\mathcal{F}} = \begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}3&-2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}-5&-5\\10&9\end{bmatrix}}$

$\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5&-5\\7&8\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-5&-5\\10&9\end{bmatrix}$

c) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+2y\\-x\\0\end{pmatrix} \Rightarrow T_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\0&0\end{bmatrix}$

$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{F} = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$

$A_{\mathcal{K}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix} \qquad A_{\mathcal{K}\leftarrow\mathcal{F}} = \begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&0\\1&0&0\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1/2&-1/2\\1/3&-1/3&0\end{bmatrix}\right)^{-1}$ ← ki kell számolni

$T_{(\mathcal{F},\mathcal{E})} = A_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{K}} \cdot T_{\mathcal{K}} \cdot A_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{K}} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1/2&-1/2\\1/3&-1/3&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\-1/2&1\\8/3&4/3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0&0\\-1/2&0\\2/3&2/3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&0\\-1/2&1\\8/3&4/3\end{bmatrix}$

2/a) $\emptyset$

b) $\begin{vmatrix}1111&111&11\\1&1&1\\1234&123&12\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1100&100&0\\1&1&1\\1123&122&1\end{vmatrix} = 100\cdot\begin{vmatrix}11&1&0\\1&1&1\\122&11&0\end{vmatrix}$

$S_3 - S_2$, $S_2 - 10S_1$ $\qquad S_3 - S_1$, $S_2 - 11S_1$ $\qquad S_3 - S_2$

$\overset{\text{kifejtés}}{=} 100\left[+0\cdot\begin{vmatrix}1&1\\122&11\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}11&1\\122&11\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}11&1\\1&1\end{vmatrix}\right] = -100$

c) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&-1&-2&1\\4&1&4&1\\8&-1&-8&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-3&-4&-1\\0&-3&0&-3\\0&-9&-16&-7\end{vmatrix} \overset{\text{kif.}}{=} \begin{vmatrix}-3&-4&-1\\-3&0&-3\\-9&-16&-7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-3&-4&1\\-3&0&-3\\3&0&-3\end{vmatrix} =$

$S_2 - 2S_1$, $S_3 - 4S_1$, $S_4 - 8S_1$ $\qquad S_3 - 4S_1$

$\overset{\text{kif.}}{=} (-4)\begin{vmatrix}-3&-3\\3&-3\end{vmatrix} = 4\cdot(9+9) = 72$

1)
$$\begin{vmatrix} p^2 & p & 1 & qrs \\ q^2 & q & 1 & prs \\ r^2 & r & 1 & pqs \\ s^2 & s & 1 & pqr \end{vmatrix} = \frac{1}{pqrs}\cdot \begin{vmatrix} p^3 & p^2 & p & pqrs \\ q^3 & q^2 & q & pqrs \\ r^3 & r^2 & r & pqrs \\ s^3 & s^2 & s & pqrs \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} p^3 & p^2 & p & 1 \\ q^3 & q^2 & q & 1 \\ r^3 & r^2 & r & 1 \\ s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix}$$

Tfh: ~~pqr~~ $p\cdot q\cdot r\cdot s \neq 0$ (egyik sem $\emptyset$

Vandermonde szerü!

$$= (-1)^3\cdot \begin{bmatrix} 1 & p^3 & p^2 & p \\ 1 & q^3 & q^2 & q \\ 1 & r^3 & r^2 & r \\ 1 & s^3 & s^2 & s \end{bmatrix} = (-1)^3\cdot(-1)^2\cdot \begin{vmatrix} 1 & p & p^3 & p^2 \\ 1 & q & q^3 & q^2 \\ 1 & r & r^3 & r^2 \\ 1 & s & s^3 & s^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p & p^2 & p^3 \\ 1 & q & q^2 & q^3 \\ 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & s & s^2 & s^3 \end{vmatrix} = \underline{(s-r)(s-q)\cdot(s-p)\cdot(r-q)\cdot(r-p)\cdot(q-p)}$$

3/a)

$3\cdot 1+(-7)\cdot 0+2(-1)=1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 42 & -11 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -49 & 13 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 42 & 4 & -49 \\ -11 & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&3&0\\0&0&4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2&0&0\\0&3&0\\0&0&4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2&0&0\\0&0&0\\0&0&4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2&0&0\\0&0&3\\0&0&0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1&0&0\\0&3&0\\0&0&4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&3&0\\0&0&4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0&1&0\\0&0&3\\0&0&0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0&0&0\\2&0&0\\0&0&4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0&1&0\\2&0&0\\0&0&4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0&1&0\\2&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&3&0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0&0&0\\2&0&0\\0&3&0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0&1&0\\2&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0&1&0\\2&0&0\\0&0&3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -24 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}^T$$

-24

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$