8. gyakorlat

① Ha átzárójelezhetem ⟺ Absz. konv. a sor /most még nem tanult/
Poz. tagú, úgy $K \Leftrightarrow A.K.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{A(n^2+3n+2)+B(n^2+2n)+C(n^2+n)}{n(n+1)\cdot(n+2)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} n^2\text{ eh:} & 0 = A+B+C \\ n\text{ eh:} & 0 = 3A+2B+C \\ n^0\text{ eh:} & 1 = 2A \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1/2,\ B = -1,\ C = 1/2$$

mi marad

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} \overset{\downarrow}{=} \frac{1/2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1/2}{2} = \underline{\underline{0{,}25}}$$

g) (h))

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} - (-2)^{k+2}}{5^k} \underset{\text{HA AK.}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k=2}^{\infty} 9\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^k - \sum_{k=2}^{\infty} 4\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^k = 9\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-3/5} - 4\cdot\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \frac{1}{1+2/5}$$

② Cauchy $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ AK $\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists N\ \ m_1, m_2 > N: \ (m_1 < m_2) \ \left|\sum_{n=m_1+1}^{m_2} a_n\right| < \varepsilon$

a) $\displaystyle\left|\sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{n}{n^3+n^2+1}\right| < \varepsilon$ mikor teljesül, milyen nagy m_1, m_2-re?

Hogy ezt eldönthessük jó lenne elvégezni a Σ-t.

$$\nexists \sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{n}{n^3+n^2+1} \ \underset{\text{mindig igaz}}{\overset{\text{felesleges } \forall \text{ pos.}}{\underset{\uparrow}{<}}} \ \nexists \sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{n}{n^3} \underset{\uparrow}{<} \varepsilon$$

Nézzük meg ez mikor teljesül, akk. az eredeti is teljesülni fog. ($\Uparrow$ ilyen irányú következtetés)

$\displaystyle\sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{1}{n^2} < \varepsilon$ (A Σ-t még mindig nem tudom elvégezni, de jóval egyszerűbb.

$$\sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{1}{n^2} \underset{\text{mindig}}{\underset{\uparrow}{<}} \sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{1}{n(n-1)} \underset{\text{vizsgáljuk ezt}}{<} \varepsilon$$

$$\sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{m_1} < \varepsilon$$

$$m_2 > m_1 > 1/\varepsilon \Rightarrow \underline{N(\varepsilon) = 1/\varepsilon}$$

Visszafele kell gondolkodni.
Ha alsó igaz, akk. a felette lévő is.
Ez volt a cél

b) $m_2 > m_1$

$m_1, m_2 > N(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}\right| < \varepsilon$

$N(\varepsilon) = ?$

$$\sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n} = \sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{2}{n\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} < \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$\sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{2}{n\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} < \sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{2}{n\left(\sqrt{n^2}+0\right)} = 2\sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{1}{n^2} < \varepsilon \ ?$$

Előbb láttuk, hogy $\sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{1}{n^2} < \varepsilon/2$ ha $m_2 > m_1 > 2/\varepsilon$

$\Rightarrow N(\varepsilon) = 2/\varepsilon$

---

3 Leibniz

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\lg n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lg n}$ alternál ✓, $\frac{1}{\lg n}$ mon. csökk. ✓, $1/\lg n \to 0$ ✓ $\Bigg\} \Rightarrow K$

<u>Hiba:</u> $|s-s_n| < |c_{n+1}|$

$|s-s_{n-1}| < \frac{1}{\lg n} < 0{,}1 \iff n > 10^{10}$ $\quad s_{10^{10}}$ már 0,1 pontosságú

Hogyan teszek alsó becslést a hibára, h legalább 0,1 es pontatlanság

$|s-s_n| > 0{,}1 \iff \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\lg k} > 0{,}1$

Mivel ez is Leibniz $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\lg k} \in \left[s'_{n+1}, s'_{n+2}\right] = \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\lg(n+1)}, \frac{(-1)^{n+1}}{\lg(n+1)} + \frac{(-1)^{n+2}}{\lg(n+2)}\right]$ vagy fordítva

Nem kell a legnagyobb n-t megtalálni, amire még igaz.

Nézzük $n=1$-t: $s'_2 = \frac{1}{\lg 2}$; $s'_3 = \frac{1}{\lg 2} - \frac{1}{\lg 3}$

$s'_2 \approx 3{,}32 \quad s'_3 \approx 1{,}22 \Rightarrow s' \geq 1{,}22 > 0{,}1$ ✓

Pont ezt akartuk.

Továbbiakban tegyük fel, hogy legalább 0,1-es pontosságot kell meghatározzuk.

g) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n}{n^2-1}$ alternál, $\frac{2n}{n^2-1} \to 0$ ✓

$\frac{2n}{n^2-1} \overset{?}{>} \frac{2(n+1)}{(n+1)^2-1} \iff 2n^3+4n^2 > 2n^3+4n^2-2n-2$

$-2n^2+2n+2>0$ ✓ mon. csökk. –

Leibniz

$|r_n|<0{,}1 \iff \frac{2n}{n^2-1}<0{,}1 \iff 0<n^2-20n-1$

$n_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{400+4}+20}{2}=\pm\sqrt{101}+10$

$\Rightarrow \underline{n>20}$ S_{20} már jó

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^\alpha}{n!}$ alternál, $\frac{n^\alpha}{(n+1)!} \to 0$ ✓

$\frac{n^\alpha}{n!} \overset{?}{>} \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)!}$ $n+1 > \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha$

$\downarrow$ ∞ $\downarrow n\to\infty$ 1

Tehát valamilyen n_0-tól igaz.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!}$ ← Leibniz

Alkalmazható a lebecslés $\frac{n^\alpha}{n!}<0{,}1 \to$ Meghatározzuk n_1-et, amire teljesül.

$S_{\max\{n_0, n_1-1\}}$ jó lesz.

4

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sqrt{n}} \underset{\text{m.m. n-re}}{<} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac12 n^2} = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ $\underline{\underline{K}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3} \underset{\text{m.m. n-re}}{<} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-\frac12 2^{n}} = 2\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac12\right)^n < \infty$ $\underline{\underline{K}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n} = \infty$ $\underline{\underline{D}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n+2^n+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+3^n}{6^n} < \infty$ $\underline{\underline{K}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5+n^3+1}{n^8-n^2+3} \underset{\text{m.m. n-re}}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5+n^5+n^5}{n^8-\frac12 n^8+0} = 18\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$ $\underline{\underline{K}}$

j) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}} = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{12}{(n-2)(n-3)} < \sum_{n=6}^{\infty} \frac{12}{n\cdot n^2} < \infty$ $\underline{\underline{K}}$