1. gyakorlat

1/c) $\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \in C^2(\mathbb{R}),\ f''(x) + x f(x) = 0 \} = V$

Vektor teret alkot

+ zárt: $f, g \in V$ (azaz $f'' + xf = 0$ és $g'' + xg = 0$)

$f+g \in V$ $\quad f+g \overset{?}{\in} C^2(\mathbb{R})$ ✓

$$(f+g)'' + x(f+g) = \underbrace{f'' + xf}_{0} + \underbrace{g'' + xg}_{0} \overset{?}{=} 0 \quad ✓$$

+ asszoc. $f, g, h \in V$

$f + (g+h) \overset{?}{=} (f+g) + h$

INDIREKTEN tfh. $f + (g+h) \neq (f+g) + h \quad \exists x:$

$$\big(f + (g+h)\big)(x) \neq \big((f+g) + h\big)(x)$$

$\quad \| f + \oplus$ def $\qquad \| \oplus + h$ def

$$f(x) + (g+h)(x) \neq (f+g)(x) + h(x)$$

$\quad \|$ g+h def $\qquad \|$ f+g def.

$$f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) \neq \big(f(x) + g(x)\big) + h(x)$$

$\mathbb{R}$-ben + asszoc., ezért ez ellentmondás

Mondhatjuk, h örökli $\mathbb{R}$-beli összeadás tulajdonságait (kommu., asszoc.)

+ kommu hasonlóan

+ neutrális elem $\Theta: x \to 0$, $\Theta \overset{?}{\in} V$ igen $\Leftarrow \Theta \in C^2(\mathbb{R})$ ✓

$\Leftarrow \Theta'' + x \cdot \Theta = 0 + x \cdot 0 \overset{?}{=} 0$ ✓

, neutrális elem-e?

$g \in V \quad (g + \Theta)(x) = g(x) + \Theta(x) = g(x) + 0 = $

$= g(x)$ ✓

+ invertálható

Ha $g \in V$, akkor $h(x) = -g(x)$ g inverze

$h(x) \overset{?}{\in} V$ igen $\Leftarrow h \in C^2(\mathbb{R})$ ✓

$\Leftarrow h''(x) + x h(x) = \big(-g(x)\big)'' + x\big(-g(x)\big) = -g''(x) - xg(x) =$

$= -\big(g''(x) + xg(x)\big) = 0$ ✓

tényleg inverze g-nek?

igen $\Leftarrow h(x) + g(x) = -g(x) + g(x) = 0 = \Theta(x)$ ✓

• zárt $f \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\left((\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \right)$

$\lambda \cdot f \overset{?}{\in} C^2(\mathbb{R})$ ✓

$$(\lambda \cdot f)''(x) + x \cdot (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f''(x) + \lambda x f(x) = \lambda \cdot \underbrace{(f''(x) + x f(x))}_{0 \Leftarrow f \in V} = 0 \quad ✓$$

• disztributivitási stab. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in V$

$\lambda(f+g) \overset{?}{=} \lambda f + \lambda g$

Mondhatjuk, h örökli ... vagy

Indirekt $\lambda(f+g) \neq \lambda f + \lambda g$ $\exists x : (\lambda(f+g))(x) \neq (\lambda f + \lambda g)(x)$

$$(\lambda(f+g))(x) \overset{\cdot\, \text{def.}}{=} \lambda \left[(f+g)(x) \right] \overset{+\text{def}}{=} \lambda \left(f(x) + g(x) \right) \overset{\mathbb{R}\text{-beli} \cdot \text{distr.}}{=} \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

$$(\lambda f + \lambda g)(x) \overset{+\text{def}}{=} (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) \overset{\cdot\,\text{def}}{=} \lambda f(x) + \lambda g(x)$$ ⇐ ellentmondás

Teljes jogos, ha ez egyelőre feleslegesnek tűnik (egész feladat). De pont ~~azért~~ ez mutatja, hogy jól vannak definiálva a fv-ek összeadása, skalárral szorzása. (Ha az volt a cél, h vektortér legyen)

A többi disztributivitási az. hasonlóan.

1/ii) NEM, hiszen

például

$$\cancel{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cancel{=} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left(1 \in \mathbb{R} \quad 1 \cdot \underline{v} = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V \right)$$

2/c) i) $D = \{ n \times n\text{-s diagonális mx-ek} \}$ altér M_n-ben

+ zárt:

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1+e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n+e_n \end{bmatrix} \overset{?}{\in} D \quad ✓$$

• zárt

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda d_n \end{bmatrix} \overset{?}{\in} D \quad ✓$$

ii) $A = \{ B \in M_n \mid b_{ii} = 0 \}$ altér M_n-ben

+ zárt

$$\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & c_{23} \dots & c_{2n} \\ & & \ddots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12}+c_{12} & \dots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & 0 & & \\ & & \ddots & \end{bmatrix} \overset{?}{\in} A \quad ✓$$

• zárt

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda b_{12} & \lambda b_{13} & \dots & \lambda b_{1n} \\ \lambda b_{21} & 0 & \lambda b_{23} & \dots & \lambda b_{2n} \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} \overset{?}{\in} A \quad ✓$$

iv) $T = \{ A \in M_n \mid \underset{\text{Trace / nyom}}{\operatorname{Tr} A} \left(= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right) = 0 \}$

+zárt: $A, B \in T$ $A+B$-ben i. sorban j. oszlopban lévő elem $a_{ij} + b_{ij}$

$$\operatorname{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii} = \underbrace{\sum a_{ii}}_{0 \;\Leftarrow A \in T} + \underbrace{\sum b_{ii}}_{0 \; B \in T} = 0 \checkmark$$

· zárt $A \in T$ $\lambda \in \mathbb{R}$

λA-ban i. sor j. oszlopban lévő elem $\lambda \cdot a_{ij}$

$$\operatorname{Tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}_{0 \; A \in T} = 0 \checkmark$$

3/c) II

Def $v_1 \dots v_n$ lin. ftlen, ha $\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

$$a_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$ (Van-e a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$-n kívül mo.?)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \text{e.r. mo.}$$

Gauss elim.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(elhagyható / semmiv. nem vált.-ja meg!)

$S_3 - S_1$; $S_2/2$ $\quad S_2 - S_1$ $\quad \frac{S_2}{-2}$; $\frac{S_3}{-3}$ $\quad S_3 - S_2$

$r(A) = r(A|b) < \sigma$

$2 = 2 < 3 \Rightarrow \infty$ mo

a_3: szabad par. ált. mo.: $a_2 = -2a_3$, $a_1 = -2a_2 - 6a_3 = -2a_3$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2$ lin. ftlen!

és $v_3 \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$

pl: $-2, -2, 1$ mo. az egyenletet

$$-2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nem csak 1 féleképpen lehet előáll. a 0-t!

3/e) Nem, hiszen $f_1 + f_2 - f_3 = 0$

g) $1, x, x^2, x^3$ bázisban: $\begin{pmatrix}5\\0\\7\\1\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\6\\5\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

$\Updownarrow$

$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\begin{pmatrix}5\\0\\7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \alpha_1 + \begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\end{pmatrix} \cdot \alpha_2 + \begin{pmatrix}0\\6\\5\\0\end{pmatrix} \cdot \alpha_3$

$\Updownarrow$

mo. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ egyenlet rsz. NEM, „tilos sor"

$r(A) < r(A|b)$

h) Nem, például: $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{99}, \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{99}$

Ez jó példa, - bárhogy választunk 99 db-ot lin ftlen

- $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{99}$ lin. ftlen
- ha ε_k-t hagyom ki:

$\langle \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \dots \varepsilon_{99}, \sum_{i=1}^{99} \varepsilon_i \rangle$ által generált térnek eleme ε_k-n kívül mindegyik, de ε_k is, hiszen $\sum_{i=1}^{99} \varepsilon_i$ - összes többi $= \varepsilon_k$

A generált térben van 99 db lin. ftlen

$\Rightarrow$ és mivel 99 vektor generálta $\Rightarrow$ generáló vektorok ftlenek!

- a 100 vektoron nem lin. ftlen, hiszen

$1 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + \dots + 1 \cdot \varepsilon_{99} - 1 \cdot \sum_{i=1}^{99} \varepsilon_i = 0$

i) $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}$ lin. ftlen a.cs.a ezek a vektorok bázisa $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ térnek a.cs.a

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & +1 & -1 & & \\ & & +1 & & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ áttérési mx $\{a_1, a_2 - a_1 \dots\}$-ről $\{a_1 \dots a_n\}$-re

a.cs.a $\det A \neq 0$ a.cs.a $r(A) = n$

$\det A \neq 0$ lin. ftlen!