10. feladatsor   vegyész A3c   2013/14. ősz

1. A (ξ,η) lehetséges értékeit és együttes valószínűség-eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

a) $P(\xi = i, \eta = 0)$ ahol ($i = 0, 1, 2$) b) $P(\xi < 2 \mid \eta = 0)$ c) $P(\xi \geq 1 \mid \eta = 1)$ d) $P(\eta = 1 \mid \xi \geq 1)$ Írja fel $M(\eta \mid \xi)$ eloszlását.

ξ\η	0	1
0	p	p
1	p	3p
2	2p	4p

2. Egy piros és egy kék kockával dobunk. Legyen X a piros kockán dobott szám, Y pedig a két szám összege. Számítsuk ki Y-nak az X = 3 eseményre vonatkoztatott feltételes várható értékét.

3. ξ és η együttes valószínűség-eloszlását a következő táblázat tartalmazza. Írja fel $M(\eta \mid \xi)$ eloszlását.

η\ξ	1	2	3
1	1/12	0	2/12
2	2/12	1/12	3/12
3	0	2/12	1/12

(4.) Az (ξ,η) valószínűségi vektorváltozó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza a táblázat. Határozza meg p és q paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy a valószínűségi változók korrelálatlanok. Függetlenek-e a változók?

ξ\η	1	0	2
-1	p	q	p
1	q	p	q

5. Két valószínűségi változó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza a táblázat: Adja meg az együttes eloszlásfüggvényt, és a perem eloszlásokat. Független-e a két változó? Hanem, akkor adja meg a korrelációs együttható értékét.

X\Y	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/2	0

6. Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x^2 + \frac{xy}{2}), & ha \quad 0 < x \leq 1 \quad és\, 0 < y \leq 2 \\ 0 & különben \end{cases}$$

Adja meg a változók kovarianciáját és a korrelációs együttható értékét.

7. A ξ valószínűségi változó jelentse egy kémiai anyag felületi feszültségét, η a savasságát. A skálázást úgy végezzük, hogy ξ 0 és 2 között, η 2 és 4 között vesz fel értékeket. A valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda\,(6 - x - y) & ha \qquad 0 \leq x \leq 2 \;\; és \;\; 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & különben \end{cases}$$

a.) Határozza meg a λ paraméter értékét. b.) Adja meg a feltételes sűrűségfüggvényt. c.) Határozza meg az elsőfajú regressziós függvényt.

8. Az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit a (0,0) ; (0,4) ; (4,0); (4,4) pontok által meghatározott négyzet belsejében levő egész koordinátájú pontok alkotják. Az (X,Y) bármelyik értékét egyenlő valószínűséggel veszi fel a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsuk ki X és Y korrelációs együtthatóját, és állapítsa meg, független-e ez a két valószínűségi változó.

9. Legyen (ξ,η) az 1. feladatban adott eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg a ξ-nek az η-ra, illetve az η-nak a ξ–re vonatkozó regressziós függvényét.

10. Melyik mátrix lehet 3 változó kovariancia mátrixa?

a.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$