Differenciálegyenletek megoldása közelítő módszerekkel

1) Adja meg az alábbi kezdetiérték - probléma közelítő megoldásait szukcesszív approximációval!

a.) $y' = x + y$ és $y(0) = 1$; $n = 4$

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x x + 1\,dx = 1 + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x x + \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}_{y_1(x)}\,dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x x + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}\,dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x x + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\,dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120}$$

Keresse meg az analitikus megoldást is és határozza meg a két megoldás közti különbséget!

$y' = x + y \qquad y(0) = 1$

$\hookrightarrow y' - y = x$

$\Longrightarrow$ HOMOGÉN / $e^{\lambda x}$ alakban /

$$y' - y = 0$$

$$\lambda \cdot e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$y_H = c \cdot e^x$$

$\Longrightarrow$ PARTIKULÁRIS

$$y' - y = x \qquad y = c(x)\,e^x$$

$$c' e^x + c \cdot e^x - c \cdot e^x = x$$

$$c' = x \cdot e^{-x}$$ szeparábilis

$$\frac{dc}{dx} = x \cdot e^{-x} \qquad u \cdot v - u' \cdot v$$

$$c = \int 1 \, dc = \int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{e^{-x}} \, dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x}$$

$$y_p = c(x) \cdot e^{x} = -x - 1$$

$$y = y_H + y_p = -x - 1 + c \cdot e^{x}$$

$$y(0) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad 1 = 0 - 1 + c \cdot e^{0} \implies \boxed{c = 2}$$

$$y = -x - 1 + 2e^{x}$$

$$y = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} \qquad \text{(approx.)}$$

0 körül e^x Taylor polinom

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

első 5 taggal:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

$$y = -1 - x + 2e^x \approx 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \;\Big|\; + \frac{x^5}{60}$$

---

b) $y' = y^2 - (x+1)\, y + 1 \qquad y(0) = 1 \qquad n = 2$

$$y_0(\cancel{x}) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 - (x+1) + 1 \, dx = 1 + x - \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + x - \frac{x^2}{2}\right)^2 - (x+1)\left(1 + x - \frac{x^2}{2}\right) + 1 \, dx$$

kibontva: $\frac{x^4}{4} + x^2 + 1 - 2x - x^2 - x^3 - \left(x + x^2 - \frac{x^3}{2} + 1 + x - \frac{x^2}{2}\right)$

$$1 + \int_0^x \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - 4x + 1 \, dx$$

$$1 + x - 2x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20} = y_2(x)$$

c.) $y' = x - y^2$ és $y(0) = 0$; $n = 3$

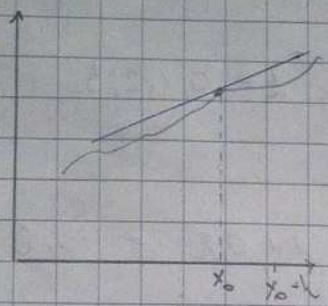
$y_0(x) = 0$

$y_1(x) = 0 + \int_0^x x \, dx = \frac{x^2}{2}$

$y_2(x) = 0 + \int_0^x x - \frac{x^4}{4} \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}$

$y_3(x) = 0 + \int_0^x x - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}\right) dx$

Euler módszer



$y' = f(x;y) \quad y(x_0) = y_0$

$y(x_0 + k \cdot h) = y_0[x_0 + (k-1) \cdot h] + h \cdot f[x_0 + (k-1) \cdot h$
$; y\, x_0 + (k-1) \cdot h]$

2.) Adja meg az alábbi kezdetiérték - probléma közelítő megoldását Euler módszerrel. A h legyen 0,1

a.) $y' = x + y \qquad y(0) = 1 \qquad h = 0{,}1$

$y_1 = y(0 + 0{,}1) = y(0) + h \cdot f(0{,}1) = 1 + 0{,}1 \cdot (0+1) = 1{,}1$

$y(0{,}2) = 1{,}1 + h \cdot f(0{,}1\ ,\ 1{,}1) = 1{,}21$

$y(0{,}3) = 1{,}21 + h \cdot f(0{,}2 ; 1{,}21) = 1{,}351$

$y(0{,}4) = 1{,}351 + h \cdot f(0{,}3 ; 1{,}351) = 1{,}482$

$y(-0{,}1) = 1 + h \cdot f(0{,}1) = 1 - 0{,}1 \cdot (0+1) = 0{,}9$

$y(-0{,}2) = 0{,}9 + h f(0{,}2) = 0{,}9 - 0{,}1 \cdot f(-0{,}1 ; 0{,}9) = 0{,}82$

b.) $y' = y - x^2 \qquad y(0) = 1 \qquad h = 0,1 \qquad i = 1;2;3$

$y_1 = y(0+0,1) = y(0) + h \cdot f(0;1) = 1 + 0,1 \cdot 1 = 1,1$

$y_2(0,2) = 1,1 + h \cdot f(0,1;1,1) = 1,1 + 0,1 \cdot (1,1 - 0,1^2) = 1,209$

$y_3(0,3) = 1,209 + 0,1\,(1,209 - 0,2^2) = 1,3259$

$y(-0,1) = 1 - 0,1\,(1 - 0^2) = 0,9$

$y(-0,2) = 0,9 - 0,1\,(0,9 - 0,1^2) = 0,811$

$y(-0,3) = 0,811 - 0,1\,(0,811 - 0,2^2) = 0,7339$

c.) $y' = \cancel{\ } 1 + xy \qquad y(1) = 1 \qquad i = 0;1;2;3$

$y(1) = 1$

$y(1,1) = 1 + 0,1 \cdot (1+1) = 1 + 0,2 = 1,2$

$y(1,2) = 1,2 + 0,1 \cdot (1 + 1,1 \cdot 1,2) = 1,2 + 0,1 \cdot 2,32 = 1,432$

$y(1,3) = 1,432 + 0,1\,(1 + 1,2 \cdot 1,432) = 1,432 + 0,1 \cdot 2,7184 = 1,70384$

$y(0,9) = 1 - 0,1 \cdot 2 = 0,8$

$y(0,8) = 0,8 - 0,1\,(1 + 0,908) = 0,628$

$y(0,7) = \cancel{\ } 0,628 - 0,1\,(1 + 0,8 \cdot 0,628) = 0,4476$