II. Gyakorlati rész

1. $y' + 0,1x = 0$ így $y' = -0,1x$ és $f(x,y) = -0,1x$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$.

$$\text{Euler módszer: } y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h,\ x_{k+1} = x_k + h$$

$x_0 = 0,\ y_0 = 2$
$x_1 = 0,2,\ y_1 = 2 - 0,1 \cdot 2 \cdot 0,2 = 1,96$
$x_2 = 0,4,\ y_2 = 1,96 - 0,1 \cdot 1,96 \cdot 0,2 = 1,9208$
$x_3 = 0,6,\ y_3 = 1,9208 - 0,1 \cdot 1,9208 \cdot 0,2 = 1,882384$

Egyenlet megoldása: $-10/ydy = dx$, $-10ln(y) = x + C$, $y(x) = c'e^{-0,1x}$, $2 = y(0) = c$

$$y(x) = 2e^{-0,1x}$$

$y(0) = 2,$
$y(0,2) = 1,9604,$
$y(0,4) = 1,9216,$
$y(0,6) = 1,8835$
Azaz az Euler módszer ezeken a pontokon két tizedes jegyig pontos.

2. X : n dobásból 4-es dobások száma Bin(n, 1/6)
$n =?$, ha $P(|X/n - 1/6| < 0,1) >= 0,8$.
Első lehetőség a M-L-t: $X\ N(n/6, \sqrt{5n/36})$

$$P(|X/n{-}1/6| < 0,1) = P\big(|X{-}n/6| < 0,1n\big) = P\left(\frac{|X - n/6|}{\sqrt{5n/36}} < \frac{0,6\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) = \Phi\left(\frac{0,6\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(-\frac{0,6\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$2\Phi\left(\frac{0,6\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 0,8$$

$$\Phi\left(\frac{0,6\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) = 0,9$$

$$\frac{0,6\sqrt{n}}{\sqrt{5}} = 1,28,\ n \approx 23$$

Második lehetőség Csebisev tétellel:

$$P(|X - n/6| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Írjuk fel a komplementer eseményt: $P(|X - n/6| \leqslant \epsilon) \geqslant 1 - \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$.
Alkalmazzuk $\epsilon = 0,1n$-re:

$$P(|X/n - 1/6| \leqslant 0,1) = P(|X - n/6| \leqslant 0,1n) \geqslant 1 - \frac{D^2(X)}{0,01n^2} = 1 - \frac{500}{36n} > 0,8$$

Ebből:

$$n > \frac{5000}{72} = 69,4\cdot$$

Ezzel a módszerrel 70 jön ki küszöbnek.