Felsőbb Matematika (2012-13 ősz) 6. gyakorlat

1. Ábrázoljuk az $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{x}_1^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{x}_1 + C$, ahol $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{B} = [-10 \ \ -20], \quad C = 5,$$

azaz $10x_1^2 + 5y_1^2 - 10\sqrt{5}y_1 + 5 = 0$, amiből $10x_1^2 + 5(y_1^2 - 2\sqrt{5}y_1 + 5) = 20$, azaz $(x_2, y_2) = (x_1, y_1 - \sqrt{5})$ jelöléssel: $2x_2^2 + y_2^2 = 4$. A középpont $(x_1, y_1) = (0, \sqrt{5})$, azaz $(x, y) = \mathbf{Q}(0, \sqrt{5}) = (1, 2)$, a rajta átmenő tengelyek iránytangense 2 és $-1/2$.

2. Melyek normálisak és melyek pozitív definitek az alábbi mátrixok közül?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Mindegyik mátrix szimmetrikus vagy ferdén szimmetrikus, így normális. $\mathbf{B}$ nem szimmetrikus, így nem lehet definit. Az $\mathbf{A}$ főátlójában van 0, így nem lehet pozitív definit, például mert $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 0$. $\det \mathbf{C} = 0$, így $\mathbf{C}$ nem lehet pozitív definit. $\mathbf{E}$ főátlójában van negatív elem, így nem lehet pozitív definit. $\mathbf{D}$-nek két pozitív sajátértéke van, ezért pozitív definit.

3. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:
1. $\mathbf{A}$ pozitív definit;
2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{X}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$;
3. van olyan invertálható $\mathbf{Y}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$.

Megoldás. 1. $\Rightarrow$ 2.: $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{X}^2$
2. $\Rightarrow$ 3.: $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ megfelel.
3. $\Rightarrow$ 1.: $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\mathbf{x} = |\mathbf{Y}\mathbf{x}|^2 \geq 0$ és az invertálhatóság miatt $\neq 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

4. Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor korrigált szórásnégyzetén az s^* számot értjük, ahol

$$s^* = \frac{1}{n-1}\left((x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right), \text{ és } \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Írjuk fel e kvadratikus alak mátrixát, és döntsük el, hogy pozitív definit-e.

Megoldás.

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i\bar{x}) = \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_i x_i^2\right) + n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_i x_i^2\right) - \frac{1}{n}\sum_i\sum_j x_i x_j\right) = \\ &= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)}\right)\sum_i x_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j} x_i x_j, \end{aligned}$$

így a főátlóban $\frac{1}{n}$, egyebütt $-\frac{1}{n(n-1)}$ áll.

1. megoldás: A kvadratikus alak nyilván pozitív szemidefinit, hisz értéke minden $\mathbf{x}$ vektorra nemnegatív, mivel négyzetösszeg, és 0 csak akkor lehet, ha minden $x_i = \bar{x}$, azaz ha az $\mathbf{x}$ minden koordinátája azonos – ez nem csak a 0-vektorra igaz!

2. megoldás: A mátrix sajátértékei a házi feladat szerint $\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} > 0$ és $\frac{1}{n} - (n-1)\frac{1}{n(n-1)} = 0$.

5. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A 9-közepű 1-sugarú Gerschgorin-körben csak 1 gyök lehet, így az valós, és mivel 4 gyök van, a nem-valósak párosan fordulnak elő, ezért kell még valós gyöknek lennie.

6. Mutassuk meg, hogy r-reguláris gráf $\mathbf{A}$ adjacenciamátrixának r egy sajátértéke, és minden más λ sajátértékre $|\lambda| \leqslant r$.

Megoldás. Az $\mathbf{1}$ nyilván sajátvektor, és r a hozzá tartozó sajátérték, hisz $\mathbf{A}$ minden sorában r darab 1-es van. Mivel $\mathbf{A}$ főátlójában nullák szerepelnek, a Gerschgorin körök mindegyike 0-közepű r-sugarú, tehát $|\lambda| \leqslant r$ minden λ sajátértékre.

7. Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráf adjacenciamátrixának λ sajátértéke, akkor $-\lambda$ is.

Megoldás. Az adjacenciamátrix alakja $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{X}\\ \mathbf{X}^T & \mathbf{O}\end{smallmatrix}\right]$, így ha $[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2]$ a λ-hoz tartozik, akkor $[-\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2]$ a $-\lambda$-hoz.

8. Fisher (statisztikus, populációgenetikus) növényeket vizsgált különböző körülmények között: v-féle növényt b tulajdonságra (a továbbiakban blokkoknak nevezzük). Nincs mód arra, hogy minden növénykombinációt kipróbáljunk, ezért a következő feltételeket tesszük.

1. minden blokkban k különböző növény van ($k < v$);
2. minden növény pontosan r blokkban szerepel;
3. bármely két különböző növény azonos λ számú blokkban szerepel együtt;

Igazoljuk a Fisher-egyenlőtlenséget: $v \leqslant b$.

Megoldás. Az incidenciamátrix legyen $\mathbf{A}_{v\times b}$, ahol $a_{ij} = 1$, ha az i-edik növény a j-edik blokkban van, egyébként $a_{ij} = 0$. A $v \times v$-es $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ mátrix főátlójában r, egyebütt λ áll. Mivel $r \neq \lambda$, így a házi feladat szerint $\det(\mathbf{B}) \neq 0$, ezért $\mathrm{r}(\mathbf{B}) = v$, és $\mathrm{r}(\mathbf{B}) \leqslant \mathrm{r}(\mathbf{A}) \leqslant b$, tehát $v \leqslant b$.

HF. Legyen $n > 1$ és legyen az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix főátlójában minden elem a, a többi elem $b \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az $a - b$ sajátérték $(n-1)$-szeres, az $a + (n-1)b$ pedig 1-szeres geometriai multiplicitású. Diagonalizáljuk $\mathbf{A}$-t!

HF. Diagonalizáljuk ortonormált bázisban az alábbi szimmetrikus mátrixokat, majd ez alapján írjuk föl spektrálfelbontásukat és redukált szinguláris érték szerinti felbontásukat!

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix};\quad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};\quad \text{(c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$