

1. Számítsuk ki a következő összegeket:

a) $\sum_{k=0}^0 -3$

b) $\sum_{k=0}^5 (2k+1)$

c) $\sum_{k=-3}^1 k^3$

d) $\sum_{k=7}^{20} \pi$

e) $\sum_{k=m}^n c$

f) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

g) $\sum_{k=2}^{20} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)^2}\right)$

h) $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n k-l$

2. Számítsuk ki a következő szorzatokat:

a) $\prod_{k=1}^5 k$

b) $\prod_{k=-3}^1 k^3$

c) $\prod_{k=7}^{20} \pi$

d) $\prod_{k=m}^n c$

3. Bizonyítsd be a következő azonosságokat:

1. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^n)$

2. $a^{2n-1} + b^{2n-1} = (a+b)(a^{2n-2} - a^{2n-3}b + \dots - ab^{2n-3} + b^{2n-2})$

3. $a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$

4. Bizonyítsd be a következő állításokat. Amelyik állítást lehet, írd fel szumma segítségével.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

c) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

e) $(1+x)^n \geq 1+nx$

f) $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)\dots(k+t-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+t)}{t-1}$

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $|x| = x+1$

b) $|2x+3| = x^2$

c) $|\sin(x)| = \sin(x) + 2$

d) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}$

e) $|x^2 + 6x + 6| = |x^2 + 4x + 9| + |2x - 3|$

f) $|x^4 - x^2 - 6| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$

6. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben azokat az (x, y) pontokat, melyekre teljesül:

a) $|y| \leq |x|$

b) $|y| < |x+2|$

c) $|x| + |y| \leq 2$

d) $|x| - |y| = 1$

7. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket

a) $|x+y| \leq |x| + |y|$

b) $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$

c) $a + \frac{1}{a} \geq 2, a > 0$

1. Számítsuk ki a következő összegeket:

a) $\sum_{k=0}^0 -3$

b) $\sum_{k=0}^5 (2k+1)$

c) $\sum_{k=-3}^1 k^3$

d) $\sum_{k=7}^{20} \pi$

e) $\sum_{k=m}^n c$

f) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

g) $\sum_{k=2}^{20} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)^2}\right)$

h) $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n k-l$

2. Számítsuk ki a következő szorzatokat:

a) $\prod_{k=1}^5 k$

b) $\prod_{k=-3}^1 k^3$

c) $\prod_{k=7}^{20} \pi$

d) $\prod_{k=m}^n c$

3. Bizonyítsd be a következő azonosságokat:

1. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^n)$

2. $a^{2n-1} + b^{2n-1} = (a+b)(a^{2n-2} - a^{2n-3}b + \dots - ab^{2n-3} + b^{2n-2})$

3. $a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$

4. Bizonyítsd be a következő állításokat. Amelyik állítást lehet, írd fel szumma segítségével.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

c) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

e) $(1+x)^n \geq 1+nx$

f) $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)\dots(k+t-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+t)}{t-1}$

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $|x| = x+1$

b) $|2x+3| = x^2$

c) $|\sin(x)| = \sin(x) + 2$

d) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}$

e) $|x^2 + 6x + 6| = |x^2 + 4x + 9| + |2x - 3|$

f) $|x^4 - x^2 - 6| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$

6. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben azokat az (x, y) pontokat, melyekre teljesül:

a) $|y| \leq |x|$

b) $|y| < |x+2|$

c) $|x| + |y| \leq 2$

d) $|x| - |y| = 1$

7. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket

a) $|x+y| \leq |x| + |y|$

b) $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$

c) $a + \frac{1}{a} \geq 2, a > 0$