A1b **2. gyakorlat** **2010/11/2**

Definíciók:

- Halmazműveletek:
  A komplementerén - valamilyen H halmazra viszonyítva - $(\overline{A})$, azokat az (H-beli) elemeket, amik nincsenek benne az A-ban.
  Két halmaz (A, B) metszetén $(A \bigcap B)$ azokat az elemeket értjük, melyek mindkét halmazban benne vannak.
  Két halmaz (A, B) unióján $(A \bigcup B)$ azokat az elemeket értjük, melyek legalább valamelyik halmazban benne vannak.
  A és B halmaz különbségén $(A \setminus B)$ azokat az A-beli elemeket értjük, melyek nincsenek benne B-ben. $(A \setminus B = A \bigcap \overline{B})$
  Két halmaz (A, B) szimmetrikus diferenciáján $(A \triangle B)$ azokat az elemeket, amelyik pontosan az egyikben van benne $(A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A))$.

1. Igazoljuk a következő tulajdonságokat:
   a) Aszociativitás: $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$, $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$;
   b) Kommutativizás: $A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$;
   c) Idempotencia: $A \bigcup A = A$, $A \bigcap A = A$;
   d) Elnyelési tulajdonság: $A \bigcap (A \bigcup B) = A$, $A \bigcup (A \bigcap B)$;
   e) Disztributivitás: $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$, $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;
   f) De-Morgan azonosságok: $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$, $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

2. Milyen geometriai alakzatokat alkotnak a következő számpárok:
   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t^2,\ y = 3t^3\}$
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 8\}$ d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 4,\ 0 \leqslant x \leqslant 6,\ 3x + 4y \leqslant 22\}$

3. Az első évfolyamos hallgatók közül jelöljük J-vel a járműmérnököket, F-fel a fiúkat, A-val az angolul, N-nel a németül tudó diákokat. Halmazműveletekkel írjuk le a következő halmazokat a már megnevezett halmazok segítségével:
   a) a járműmérnök fiúkat; b) az angolul és németül is tudókat;
   c) angolul vagy németül tudókat; d) azokat a fiúkat, akik tudnak németül vagy angolul;
   e) a vagy angolul vagy németül tudókat; f) a járműmérnök lányokat;
   g) a németül tudó lányokat; h) a németül tudó, járműmérnök lányokat.

4. Venn-diagramokkal igazoljuk a következő állításokat:
   a) $K \setminus (K \setminus L) = L \setminus (L \setminus K)$ b) $K \setminus (L \setminus M) = (K \setminus L) \bigcup (K \bigcap M)$
   c) $(K \bigcap L) \setminus (K \setminus M) = K \bigcap L \bigcap M$ d) $K = (K \bigcap L \bigcap M) \bigcup (K \bigcap \overline{L} \bigcap M) \bigcup (K \bigcap \overline{L} \bigcap \overline{M}) \bigcup (K \bigcap L \bigcap \overline{M})$
   e) $(K \setminus L) \setminus M = (K \setminus M) \setminus (L \setminus M)$ f) $(K \setminus L) \bigcup (L \setminus M) \bigcup (M \setminus K) \bigcup (K \bigcap L \bigcap M) = K \bigcup L \bigcup M$

5. Bizonyítsuk be a szita formulát kettő és három halmazra. Azaz
   a) $|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$
   b) $|A \bigcup B \bigcup C| = |A| + |B| + |C| - |A \bigcap B| - |B \bigcap C| - |C \bigcap A| + |A \bigcap B \bigcap C|$

6. Egy 33 fős osztályban háromféle idegen nyelvet tudnak a diákok: 20-an angolul, 16-an németül, 6-an franciául. Ha tudjuk, hogy 5 tanuló tud két és 2 tanuló három nyelven beszélni, akkor hányan nem tudnak egy idegennyelven sem beszélni, és hányan tudnak pontosan egyen?

7. Egy faluban 1000 ház van. Ezek közül 250-ben van autó, 900-ban hűtőszekrény, 950-ben televízió és 990-ben rádió. Legalább hány házban van mind a négy eszköz?

A1b 2. gyakorlat 2010/11/2

Definíciók:

- Halmazműveletek:
  A komplementerén - valamilyen H halmazra viszonyítva - $(\overline{A})$, azokat az (H-beli) elemeket, amik nincsenek benne az A-ban.
  Két halmaz (A, B) metszetén $(A \bigcap B)$ azokat az elemeket értjük, melyek mindkét halmazban benne vannak.
  Két halmaz (A, B) unióján $(A \bigcup B)$ azokat az elemeket értjük, melyek legalább valamelyik halmazban benne vannak.
  A és B halmaz különbségén $(A \setminus B)$ azokat az A-beli elemeket értjük, melyek nincsenek benne B-ben. $(A \setminus B = A \bigcap \overline{B})$
  Két halmaz (A, B) szimmetrikus diferenciáján $(A \triangle B)$ azokat az elemeket, amelyik pontosan az egyikben van benne $(A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A))$.

1. Igazoljuk a következő tulajdonságokat:
   a) Aszociativitás: $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$, $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$;
   b) Kommutativizás: $A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$;
   c) Idempotencia: $A \bigcup A = A$, $A \bigcap A = A$;
   d) Elnyelési tulajdonság: $A \bigcap (A \bigcup B) = A$, $A \bigcup (A \bigcap B)$;
   e) Disztributivitás: $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$, $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;
   f) De-Morgan azonosságok: $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$, $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

2. Milyen geometriai alakzatokat alkotnak a következő számpárok:
   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t^2,\ y = 3t^3\}$
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 8\}$ d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 4,\ 0 \leqslant x \leqslant 6,\ 3x + 4y \leqslant 22\}$

3. Az első évfolyamos hallgatók közül jelöljük J-vel a járműmérnököket, F-fel a fiúkat, A-val az angolul, N-nel a németül tudó diákokat. Halmazműveletekkel írjuk le a következő halmazokat a már megnevezett halmazok segítségével:
   a) a járműmérnök fiúkat; b) az angolul és németül is tudókat;
   c) angolul vagy németül tudókat; d) azokat a fiúkat, akik tudnak németül vagy angolul;
   e) a vagy angolul vagy németül tudókat; f) a járműmérnök lányokat;
   g) a németül tudó lányokat; h) a németül tudó, járműmérnök lányokat.

4. Venn-diagramokkal igazoljuk a következő állításokat:
   a) $K \setminus (K \setminus L) = L \setminus (L \setminus K)$ b) $K \setminus (L \setminus M) = (K \setminus L) \bigcup (K \bigcap M)$
   c) $(K \bigcap L) \setminus (K \setminus M) = K \bigcap L \bigcap M$ d) $K = (K \bigcap L \bigcap M) \bigcup (K \bigcap \overline{L} \bigcap M) \bigcup (K \bigcap \overline{L} \bigcap \overline{M}) \bigcup (K \bigcap L \bigcap \overline{M})$
   e) $(K \setminus L) \setminus M = (K \setminus M) \setminus (L \setminus M)$ f) $(K \setminus L) \bigcup (L \setminus M) \bigcup (M \setminus K) \bigcup (K \bigcap L \bigcap M) = K \bigcup L \bigcup M$

5. Bizonyítsuk be a szita formulát kettő és három halmazra. Azaz
   a) $|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$
   b) $|A \bigcup B \bigcup C| = |A| + |B| + |C| - |A \bigcap B| - |B \bigcap C| - |C \bigcap A| + |A \bigcap B \bigcap C|$

6. Egy 33 fős osztályban háromféle idegen nyelvet tudnak a diákok: 20-an angolul, 16-an németül, 6-an franciául. Ha tudjuk, hogy 5 tanuló tud két és 2 tanuló három nyelven beszélni, akkor hányan nem tudnak egy idegennyelven sem beszélni, és hányan tudnak pontosan egyen?

7. Egy faluban 1000 ház van. Ezek közül 250-ben van autó, 900-ban hűtőszekrény, 950-ben televízió és 990-ben rádió. Legalább hány házban van mind a négy eszköz?