A1b 3. gyakorlat 2010/11/2

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely merőleges a(z)
   a) x-tengelyre, és azt a $(3,0,0)$ metszi; b) $2x = y$, $z = 0$ egyenesre, és a a $(1,1,1)$ pont rajta van;
   c) z-tengelyre, és átmegy a $(0,1,2)$-n; d) $x = y + z$ $z = 3y + 2$ egyenesre, és a $(1,1,1)$ rajta van.

   1) a) Az x-tengely irányvektora: $(1,0,0)$ ez lesz a rámerőleges síkok normálvektora. $(x = c)$
   A megadott pont fogja meghatározni a konstanst: $x = 3$.
   1) b) A sík normálvektora: $(1,2,0)$, az egyenlete pedig: $x + 2y = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.
   1) c) A sík normálvektora: $(0,0,1)$, az egyenlete pedig: $z = 1$.
   1) d) A sík normálvektora: $(4,1,3)$, az egyenlete pedig: $4x + y + 3z = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8$.

2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(3,-1,2)$ ponton és párhuzamos a(z)
   a) x-tengellyel; b) $x = z$, $y = 0$ egyenessel; c) $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 5t$, $z = -3t$ egyenessel.

   2) a) A megadott egyenes irányvektora: $(1,0,0)$, mivel párhuzamosnak kell lenni az egyenesnek, ezért annak az irányvektora is ez lesz. Egyenlete: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$;
   2) b) Irányvektora: $(1,0,1)$, egyenlete: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$;
   2) c) Irányvektora: $(-2,5,-3)$, egyenlete: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Határozzuk meg az $\underline{u} = (3,-2,1)$ és $\underline{v} = (-2,5,0)$ vektorok által megadott vektorok komponenseit és hosszát:
   a) $3\underline{u}$ b) $\frac{3}{5}\underline{u} + \frac{4}{5}\underline{v}$ c) $2\underline{v}$ d) $\underline{u} + \underline{v}$ e) $\underline{u} + 6\underline{v}$

   3) a) $(9,-6,3)$ **3) b)** $(\frac{1}{5}, \frac{14}{5}, \frac{3}{5})$ **3) c)** $(-4,10,0)$ **3) d)** $(1,3,1)$ **3) e)** $(-9,28,1)$

4. Keressük meg a $\overrightarrow{P_1P_2}$ irányektorát, és P_1P_2 szakasz felezőpontját!
   a) $P_1(-1,1,5)$, $P_2(2,5,0)$ b) $P_1(3,4,5)$, $P_2(2,3,4)$ c) $P_1(1,1,1)$, $P_2(1,2,3)$

   4) a) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$, $P = P_1 + 1/2 \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 3 \\ 2,5 \end{bmatrix}$;
   4) b) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 3,5 \\ -2,5 \end{bmatrix}$;
   4) c) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}$.

5. Határozzuk meg az $\underline{u} \cdot \underline{v}$, $|\underline{u}|$, $|\underline{v}|$ értékeit; $\underline{u}$ és $\underline{v}$ szögének koszinuszát és $\underline{u}$-nak a $\underline{v}$ irányú skaláris komponensét.
   a) $\underline{u} = 2\underline{i} - 4\underline{j} + \sqrt{5}\underline{k}$, $\underline{v} = -2\underline{i} + 4\underline{j} - \sqrt{5}\underline{k}$; b) $\underline{u} = 10\underline{i} + 11\underline{j} - 2\underline{k}$, $\underline{v} = 3\underline{j} + 4\underline{k}$;

   5) a) $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}$ $\underline{u} \cdot \underline{v} = 2(-2) + (-4)4 + \sqrt{5}(-\sqrt{5}) = -25$,
   $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{2 \cdot 2 + (-4)(-4) + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = 5$, $|\underline{v}| = \sqrt{(-2)(-2) + 4 \cdot 4 + (-\sqrt{5}) \cdot (-\sqrt{5})} = 5$,
   $\cos(\underline{u} \measuredangle \underline{v}) = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}} = \frac{-25}{5 \cdot 5} = -1$, $\frac{|\underline{u}|}{|\underline{v}|}\underline{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$

   5) b) $\underline{u} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\underline{u} \cdot \underline{v} = 10 \cdot 0 + 11 \cdot 3 + (-2)4 = 25$,
   $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{10 \cdot 10 + (11)(11) + (-2) \cdot (-2)} = 15$, $|\underline{v}| = \sqrt{3 \cdot 3 + (4) \cdot (4)} = 5$,
   $\cos(\underline{u} \measuredangle \underline{v}) = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}} = \frac{25}{15 \cdot 5} = \frac{1}{3}$, $\frac{|\underline{u}|}{|\underline{v}|}\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$

6. Mutassuk meg, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!

6) Ha rombusz pontjait $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$-gyel jelöljük valamelyik körüljárási irány szerint, akkor tudjuk, hogy oldalai ugyanolyan hosszúak, azaz: $|\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{P_2P_3}| = |\overrightarrow{P_3P_4}| = |\overrightarrow{P_4P_1}| = |\underline{a}| = |\underline{b}|$. A szemben lévő oldalai párhuzamosak, azaz $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3} = \underline{a}$ és $\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_1P_4} = \underline{b}$.
Számoljuk ki $\overrightarrow{P_1P_3} \cdot \overrightarrow{P_2P_4} = (\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{b}-\underline{a}) = -\underline{a}\cdot\underline{a} + \underline{b}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2 = \underline{0}$. Azaz a két átló merőleges egymásra, hiszen skalárszorzatuk 0.

7. Mutassuk meg, hogy a $\underline{v} = a\underline{i} + b\underline{j}$ vektor merőleges az $ax + by = c$ egyenesre.

7) $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és az egyenes egyenlete: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c/a \\ 0 \end{bmatrix}$. Láthatjuk, hogy a helyvektor és az egyenes irányvektorának skalárszorzata 0 $(= a \cdot b + b \cdot (-a))$. Azaz merőlegesek egymásra.

8. Számítsuk ki az $\underline{u} \times \underline{v}$ és a $\underline{v} \times \underline{u}$ vektorok hosszát, és adjuk meg az irányát is!

a) $\underline{u} = 2\underline{i} - 2\underline{j} + 4\underline{k},\ \underline{v} = -\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}$; b) $\underline{u} = \underline{i} - 4\underline{j} + \underline{k},\ \underline{v} = -2\underline{i} + 4\underline{j}$; c) $\underline{u} = 2\underline{i},\ \underline{v} = -3\underline{j}$;

8) a) $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\ \underline{u} \times \underline{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)(-2) - 4 \cdot 1 \\ 4(-1) - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 - (-2)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ |\underline{u} \times \underline{v}| = 0,$

$\underline{v} \times \underline{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 - (-2)(-2) \\ 2 \cdot (-2) - 4(-1) \\ (-2)(-1) - 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ |\underline{v} \times \underline{u}| = 0.$

8) b) $\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},\ \underline{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},\ \underline{u} \times \underline{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 4 \\ 1(-2) \\ 1 \cdot 4 - (-2)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix},$

$|\underline{u} \times \underline{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} = 6,\ \underline{v} \times \underline{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 \\ -1(-2) \\ (-2)(-4) - 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ |\underline{v} \times \underline{u}| = 6.$

9. Számítsuk ki a P, Q, R pontok által meghatározott háromszögek területét, majd adjunk meg egy PQR síkra merőleges egységvektort.

a) $P(1,1,1),\ Q(2,1,3),\ R(3,-1,1)$; b) $P(2,-2,1),\ Q(3,-1,2),\ R(3,-1,1)$.

9) a) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},\ T_{PQR_\triangle} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = |\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}| = |\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}| = 6.$

A $P,\ Q,\ R$ síkjára merőleges egységvektor: $\frac{\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$

9) b) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ T_{PQR_\triangle} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = |\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}| = |\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}| = \sqrt{2}.$

A $P,\ Q,\ R$ síkjára merőleges egységvektor: $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$

10. Számítsuk ki az $\underline{u},\ \underline{v},\ \underline{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

a) $\underline{u} = 2\underline{i},\ \underline{v} = 2\underline{j},\ \underline{w} = 2\underline{k}$; b) $\underline{u} = 2\underline{i} + \underline{j},\ \underline{v} = 2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k},\ \underline{w} = \underline{i} + 2\underline{k}$.

10) a) $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \underline{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ \underline{uvw} = |\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}| = 8.$

10) b) $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \underline{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ \underline{uvw} = |\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}| = 8.$

11. Rögzített $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokkal fejezzük ki a következőket:

a) egy $\underline{u}$-ra és $\underline{v}$-re ortogonális vektort; b) az $\underline{u},\ \underline{v},\ \underline{w}$ által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

11) a) $\underline{u} \times \underline{v}$ **11) b)** $\underline{uvw}$

12. Írjuk fel az $A(1,1,-1),\ B(2,0,2),\ C(0,-2,1)$ pontokon átfektetett sík egyenletét.

12) Határozzuk meg a sík normálisát. Ami bármely a síkban két nem párhuzamos vektorának vektoriális szorzatából megkaphatjuk: $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$: $\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}.$
A normálvektoros egyenlete pedig: $7x - 5y - 4z = 7 - 5 + 4 = 6.$

13. Keressük meg az $x = 2t+1$, $y = 3t+2$, $z = 4t+3$, valamint az $x = s+2$, $y = 2s+4$, $z = -4s-1$ egyenesek metszéspontját, majd írjuk fel az egyenesek által meghatározott sík egyenletét!

13) A két egyenes: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert: $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Gauss eliminációval

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & -2 & | & 2 \\ 4 & 4 & | & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & -1 & | & 1 \\ 4 & 4 & | & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 8 & | & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Azaz $t = 0$, $s = -1$-nél van a metszéspont: $M(1,2,3)$. A sík normálisának meghatározásához: $\begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rajta kell lennie az M pontak, így az egyenlet: $-20x + 12y + z = -20 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + +1 \cdot 3 = 7$.

14. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_0(2,1,-1)$ ponton és merőleges a $2x+y-z=3$, $x+2y+z=2$ síkok metszésvonalára.

14) A síkok metszésvonalának meghatározásához megoldjuk az következő egyenletrendszert (Gauss eliminációval):

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & -3 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 4/3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1/3 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Erre az egyenesre merőleges sík normálisa $(1,-1,1)^T$.

A P_0 pont rajta van: $1 \cdot x - 1/3 \cdot y + 1 \cdot z = 1 \cdot 2 + -1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 = 0$.

15. Határozzuk meg a $2x - y + z = 5$ és $3x + y - 2z = 3$ síkok metszeteként előálló egyenes egyenletét.

15) A síkok metszésvonalának meghatározásához megoldjuk az következő egyenletrendszert (Gauss eliminációval):

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 5 \\ 3 & 1 & -2 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -2 \\ 2 & -1 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -2 \\ 0 & -5 & 7 & | & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,2 & | & 1,6 \\ 0 & 1 & -1,4 & | & -1,8 \end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 1,4 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1,6 \\ -1,8 \\ 0 \end{bmatrix}$ (szép alakban: $= \begin{bmatrix} 0,2 \\ 1,4 \\ 1 \end{bmatrix} (t-2) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$) .

16. Határozzuk meg a $(0,0,12)$ pont és az $x = 4t$, $y = -t$, $z = 2t$ egyenes távolságát.

16) Írjuk fel azt a síkot, ami merőleges az egyenesre, és érinti a pontot. Az egyenes irányvektora: $(4,-1,2)^T$, a sík egyenlete: $4x - y + 2z = 4 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 24$. A megadott egyenes ($x = -4y$, $z = -2y$) és a sík metszéspontját kell még meghatároznunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 4 & -1 & 2 & | & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -17 & 2 & | & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 10,5 & | & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 32/7 \\ 0 & 1 & 0 & | & -8/7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 16/7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$M(32/7, -8/7, 16/7)$. A távolság: $|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(32/7)^2 + (-8/7)^2 + (16/7-12)^2} = 4\sqrt{\frac{51}{7}}$.

17. Határozzuk meg a $(0,-1,0)$ pont és a $2x + y + 2z = 4$ sík távolságát!

17) A távolság annak a szakasznak a hossza lesz, amely merőleges a síkra, és a pontból indul. Tehát az irányvektora pont a sík normálisa lesz, azaz $(2,1,2)$.

Így a szakaszon áthaladó egyenes: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. A szakasz másik végpontja az egyenes és a sík metszéspontja: Az egyenes egyenletrendszerét átírhatjuk a következő alakba: $y + 1 = t$, ezért: $x = 2y + 2$, $z = 2y + 2 = x$. Tehát a 3 egyenletes egyenletrendszerünket fogjuk megoldani:

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 9 & | & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 10/9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4/9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10/9 \end{bmatrix}$ Így a metszéspont: $M(10/9, -4/9, 10/9)$. A távolság: $|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(10/9)^2 + (5/9)^2 + (10/9)^2} = 5/3$

18. Határozzuk meg az $x = 2t+1$, $y = 3t+2$, $z = 4t+3$ és $x = 1-s$, $y = 3+s$, $z = 2+2s$ egyenesek távolságát.

18) Mi lesz annak az egyenesnek az irányvektora $\underline{v}$, ami mindkét egyenesre merőleges?

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, akkor $\underline{v} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$

Az egyik egyenes: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, a másik $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Oldjuk meg: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Átrendezve: $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 3 & -1 & -8 & | & 1 \\ 4 & -2 & 5 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & -2 & -10 & | & 1 \\ 0 & -4 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & | & 1 \\ 0 & 5 & 22 & | & -2 \\ 0 & -4 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & | & 1 \\ 0 & 1 & 23 & | & -3 \\ 0 & -4 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & | & 1 \\ 0 & 1 & 23 & | & -3 \\ 0 & 0 & 93 & | & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3/93 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20/93 \\ 0 & 0 & 1 & | & -13/93 \end{bmatrix}.$$

A két egyenes távolsága: $|q| \cdot |(2,-8,5)^T| = \frac{13}{93} \cdot \sqrt{2^2 + (-8)^2 + 5^2} = \frac{13}{\sqrt{93}}$.

19. Határozzuk meg az $x + y = 1$ és a $2x + y - 2y = 2$ síkok szögét!

19) A két normális: $\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \cos(\underline{n}_1 \measuredangle \underline{n}_2) = \frac{\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2}{|\underline{n}_1||\underline{n}_2|} = \frac{2+1}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\underline{n}_1 \measuredangle \underline{n}_2) = 45°$.

20. Határozzuk meg az egyenes és a sík döféspontját!

a) $x = 1 - t$, $y = 3t$, $z = 1 + t$; $2x - y + 3z = 6$; b) $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 5t$, $z = 3t$; $x + y + z = 2$.

20) a) Az egyenes egyenletéből küszöböljük ki a t-t $t = z - 1 \Rightarrow x = 2 - z,\ y = 3z - 3$. Oldjuk mega a három egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -3 \\ 2 & -1 & 3 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -3 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1,5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1,5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0,5 \end{bmatrix}.$$

A döféspont: $D(1,5, -1,5, 0,5)$.

20) b) Az egyenes egyenletéből küszöböljük ki a t-t $t = (x-1)/2 \Rightarrow y = 2,5x - 1,5,\ z = 1,5x - 1,5$. Oldjuk mega a három egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ -2,5 & 1 & 0 & | & -1,5 \\ -1,5 & 0 & 1 & | & -1,5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3,5 & 2,5 & | & 3,5 \\ 0 & 1,5 & 2,5 & | & 1,5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0,5 & -2,5 & | & 0,5 \\ 0 & 1,5 & -2,5 & | & 1,5 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

A döféspont: $D(1,1,0)$.

21. Párhuzamos-e az $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 5t$, $z = -3t$ egyenes a $2x + y - 7 = 8$ síkkal?

21) Ha az egyenes irányvektora ($\underline{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$) merőleges a sík normálvektorára ($\underline{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$), akkor párhuzamos lesz a sík és az egyenes. $\underline{v} \cdot \underline{n} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 + (-7)(-3) = 22$. Nem 0, ezért nem párhuzamosak.