**A1b** **5. gyakorlat** **2010/11/2**

1. Bizonyítsuk be, hogy a következő sorozatok monoton nőnek.
   a) $a_0 = 0,\ a_{n+1} = a_n^2 + 1$   b) $b_0 = 4,\ b_{n+1} = \frac{b_n^2+6}{5}$   c) $b_0 = 1,\ b_{n+1} = \frac{b_n^2+6}{5}$

2. Határozzuk meg a határértéket és a küszöbindexet a megadott $\varepsilon$-hoz:
   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n},\ \varepsilon = 10^{-6}$   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3},\ \varepsilon = 0,01$   c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6n}{3n^2+5},\ \varepsilon = 0,001$
   d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n-4},\ \varepsilon = 0,01$   e) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}+2},\ \varepsilon = 10^{-4}$   f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5}{2n^3},\ \varepsilon = 10^{-5}$

3. Állapítsuk meg, hogy a sorozat konvergens-e vagy divergens. Ha konvergens határozzuk meg a határértékét.
   $\clubsuit\ a_n = \frac{1-n}{1+2n}$   $\clubsuit\ b_n = \frac{n^2-3n}{n^2+6n-5}$   $\clubsuit\ c_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$   $\clubsuit\ d_n = \frac{n^3+n^2+1}{n^2+1}$
   $\clubsuit\ e_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$   $\clubsuit\ f_n = \frac{n-1}{n^2-2n+1}$   $\clubsuit\ g_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1}$   $\clubsuit\ h_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$
   $\clubsuit\ i_n = n^3/\binom{n}{2}$   $\clubsuit\ j_n = \frac{n!}{2^n3^n}$   $\clubsuit\ k_n = \frac{2^n+3^n}{n+4^n}$   $\clubsuit\ l_n = \frac{5^n+6^n}{6^{n+1}+4^n}$
   $\diamondsuit\ m_n = (1+\frac{1}{n})^n$   $\diamondsuit\ n_n = (\frac{n}{n+1})^n$   $\diamondsuit\ o_n = (1-\frac{1}{n^2})^n$   $\diamondsuit\ p_n = (1+\frac{1}{2n})^{n+5}$
   $\diamondsuit\ q_n = (1+\frac{4\sqrt{n}}{n+9})^{5\sqrt{n}+2}$   $\diamondsuit\ r_n = (\frac{3n+12}{3n+7})^{6n}+2$   $\diamondsuit\ s_n = (1+\frac{3}{2^n+5})^{2^n-1}$   $\diamondsuit\ t_n = (\frac{n+1}{n+2})^{n^2}$
   $\heartsuit\ u_n = \sqrt[n]{n^4+3n^2+1}$   $\heartsuit\ v_n = \sqrt[n]{10n}$   $\heartsuit\ w_n = 2\sqrt[n]{4^{n-1}n+4}$   $\heartsuit\ x_n = \sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{3}$
   $\heartsuit\ y_n = \sqrt[n]{\sin(3^n}$   $\heartsuit\ z_n = \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n+23n}}+\frac{2}{3}$   $\heartsuit\ aa_n = \sqrt[n]{2}$   $\heartsuit\ ab_n = \sqrt[n+1]{n+5}$
   $\spadesuit\ ac_n = n-\sqrt{n^2-n}$   $\spadesuit\ ad_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}$   $\spadesuit\ ae_n = \sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2-n}$

4. Döntsük el a következő sorozatokra, hogy korlátos, monoton illetve konvergens-e. Ha konvergens, akkor adjuk meg a határértékét.
   a) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$   b) $b_n = \frac{2^n3^n}{n!}$   c) $c_n = \frac{n^2+5n}{n^2+1}$   d) $d_n = \frac{2^n+1}{n!}$

5. Határozzuk meg a torlódási pontjait a következő sorozatoknak:
   a) $\cos(n\frac{\pi}{2})\frac{2n^2-3}{n^2+n+8}$   b) $(-1)^n(1+\frac{1}{n})$   c) $\sqrt{\frac{n^3+(-1)^nn^3}{3n^3+n+8}}$   d) $(-1)^n\cos(n\pi)$