# A1b 9-10. gyakorlat 2010/11/2

Elemi függvények deriváltjai, és deriválási szabályok

$(f+g)' = f' + g'$, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(e^x)' = e^x$ és $(a^x)' = (e^{\ln(a)x})' = e^{\ln(a)x}(\ln(a)x)' = a^x \ln(a)$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ és $(\log_a(x))' = (\frac{\ln(x)}{\ln(a)})' = \frac{\ln(x)'}{\ln(a)} = \frac{1}{x\ln(a)}$
- $(\tan(x))' = (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Inverz függvényderiválási szabálya: $(f^{-1}(f(x)))' = \frac{1}{f'(x)}$. Alkalmazása:

$\arccos(\cos(x))' = \frac{1}{-\sin(x)}$, tehát $\arccos(y)' = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}$

$\arctan(\tan(x))' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \cos^2(x)$, $\arctan(y)' = \frac{1}{1+y^2}$ $(\tan^2(x) + 1 = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)})$

1. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:
   a) $x^2 + 4x + 5 + \frac{1}{x}$; b) $\frac{1}{x^2} + \frac{4x+3}{x^7} + \sin(x)$; c) $e^x + \ln(x) + 10^x + \log_2(x)$.

2. Határozzuk meg a következő függggvények deriváltait:
   a) $\frac{2x+5}{3x-4}$; b) $(1-x)(1+x^2)^{-1}$; c) $\frac{1+x-\sqrt{x}}{x}$;
   d) $\frac{1}{x^2+x+1}$; e) $x^3e^x$; f) $(x^3 + e^{-x})\sin(x)$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha f, g és h függvények deriválhatóak, akkor fgh is deriválható (ahol $fgh(x) = f(g(h(x))))$ és a következő alakot veszi fel: $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

4. Számítsuk ki a $dy/dx$ függvényt:
   a) $y = -10x + 3\cos(x)$ b) $y = \frac{1}{\sin(x)} - 4\sqrt{x} + 7$ c) $y = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{tan(x)}$
   d) $y = \tan(x) - x$ e) $y = \frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$ f) $y = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$

5. Deriváljuk az alábbi implicit függvényeket, majd ábrázoljuk is!
   a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ b) $2x^2 + 4xy + y^2 = 2$ c) $4x^2 - y^2 = 3$ d) $x^2 + 9y^2 = 16$

6. Használjuk a L'Hospital tételt a határérték kiszámítására.
   $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
   ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \in \{0, \infty\}$ és $\lim_{x\to x_0} f'(x)$, $\lim_{x\to x_0} g'(x)$ létezik.
   a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ d) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[x]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$
   e) $\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{x/2}}{e^x+x}$ f) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}}$ g) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x\ln(x)}{e^x+x}$ h) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{1+\ln(\sin(x))}$
   i) $\lim_{x\to 0+} x\ln(x)$ j) $\lim_{x\to -\infty} x^2e^x$ k) $\lim_{x\to -\infty} e^x\ln(-x)$ l) $\lim_{x\to 0} \arcsin(x)ctg(x)$

7. Készítsük el az $f(x) = x^2\ln(x^2)$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

8. Határozzuk meg a következő függvények értékészletét! És próbáljuk meg ábrázolni?
   a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1$ b) $g(x) = |x^2 - 6x + 8|$ c) $h(x) = \frac{x}{x+2}$
   d) $i(x) = \frac{3x+2}{x-2}$ e) $j(x) = -2\sin(x)$ f) $k(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$
   g) $l(x) = \log_2 \frac{1}{x+1}$ h) $m(x) = \ln|x|$ i) $n(x) = 2\cos(-2x+4) - 1$
   j) $o(x) = \frac{1}{2}\sin(3-x) - 2$ k) $p(x) = \frac{1}{3}\arccos(6-3x) + 2$ l) $q(x) = \frac{1}{3}\sinh(3-x) + \frac{1}{2}$

9. Számítsuk ki az összes aszimptotáját a következő függvényeknek:
   a) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ c) $f(x) = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$