A1b 9-10. gyakorlat 2010/11/2

Elemi függvények deriváltjai, és deriválási szabályok
$(f+g)' = f' + g'$, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(e^x)' = e^x$ és $(a^x)' = (e^{\ln(a)x})' = e^{\ln(a)x}(\ln(a)x)' = a^x \ln(a)$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ és $(\log_a(x))' = (\frac{\ln(x)}{\ln(a)})' = \frac{\ln(x)'}{\ln(a)} = \frac{1}{x\ln(a)}$
- $(\tan(x))' = (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Inverz függvényderiválási szabálya: $(f^{-1}(f(x)))' = \frac{1}{f'(x)}$. Alkalmazása:
$\arccos(\cos(x))' = \frac{1}{-\sin(x)}$, tehát $\arccos(y)' = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}$
$\arctan(\tan(x))' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \cos^2(x)$, $\arctan(y)' = \frac{1}{1+y^2}$ $(\tan^2(x) + 1 = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)})$

1. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:
   a) $x^2 + 4x + 5 + \frac{1}{x}$; b) $\frac{1}{x^2} + \frac{4x+3}{x^7} + \sin(x)$; c) $e^x + \ln(x) + 10^x + \log_2(x)$.
   Megoldás
   a) $2x + 4 - x^{-2}$ b) $-2x^{-3} - 24x^{-7} - 21x^{-8} + \cos(x)$ c) $e^x + \frac{1}{x} + \ln(10)10^x + \frac{1}{\ln(2)x}$

2. Határozzuk meg a következő függgvények deriváltait:
   a) $\frac{2x+5}{3x-4}$ b) $(1-x)(1+x^2)^{-1}$ c) $\frac{1+x-\sqrt{x}}{x}$
   d) $\frac{1}{x^2+x+1}$ e) $(x^3 + e^{-x})\sin(x)$ f) x^3e^x
   Megoldás
   a) $\frac{2(3x-4)-3(2x+5)}{(3x-4)^2}$ b) $-(1+x^2)^{-1} - (1-x)(1+x^2)^{-2}(2x)$ c) $-x^{-2} + \frac{1}{2x^{-\frac{3}{2}}}$
   d) $\frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$ e) $(3x^2 - e^{-x})\sin(x) + (x^3 + e^{-x})\cos(x)$ f) $3x^2e^x + x^3e^x$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha f, g és h függvények deriválhatóak, akkor fgh is deriválható (ahol $fgh(x) = f(g(h(x))))$ és a következő alakot veszi fel: $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.
   Megoldás $(fgh)' = (f(gh))' = f'(gh) + f(gh)' = f'gh + f(g'h + gh') = f'gh + fg'h + fgh'$

4. Számítsuk ki a dy/dx függvényt:
   a) $y = -10x + 3\cos(x)$ b) $y = \frac{1}{\sin(x)} - 4\sqrt{x} + 7$ c) $y = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}$
   d) $y = \tan(x) - x$ e) $y = \frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$ f) $y = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$
   Megoldás
   a) $\frac{dy}{dx} = -10 - 3\sin(x)$ b) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ c) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)}$
   d) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$ e) $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}$ f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{(\sin(x)\cos(x))^2}$

5. Deriváljuk az alábbi implicit függvényeket, majd ábrázoljuk is!
   a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ b) $2x^2 + 4xy + y^2 = 2$ c) $4x^2 - y^2 = 3$ d) $x^2 + 9y^2 = 16$
   Megoldás
   a) $2x + 2yy' = 0$ b) $4x + 4y + 4xy' + 2yy' = 0$ c) $8x - 2yy' = 0$ d) $2x + 9yy' = 0$

6. Használjuk a L'Hospital tételt a határérték kiszámítására.
   a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ d) $\lim_{x\to -1} \frac{x\sqrt{3+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$
   e) $\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{x/2}}{e^x+x}$ f) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}}$ g) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x\ln(x)}{e^x+x}$ h) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{1+\ln(\sin(x))}$
   i) $\lim_{x\to 0+} x\ln(x)$ j) $\lim_{x\to -\infty} x^2e^x$ k) $\lim_{x\to -\infty} e^x\ln(-x)$ l) $\lim_{x\to 0} \arcsin(x)ctg(x)$
   Megoldás
   a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 1 d) 0 e) 0 f) 0
   g) ∞ h) 1 i) 0 j) 0 k) 0 l) 1

7. Készítsük el az $f(x) = x^2\ln(x^2)$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
   Megoldás A függvény **értelmezési tartomány**a: $D(f(x)) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. A függvény **határérték**ei az értelmezési tartomány szélén:
   $\lim_{x\to-\infty} x^2\ln(x^2) = \lim_{x\to\infty} x^2\ln(x^2) = \infty$, $\lim_{x\to 0-} x^2\ln(x^2) = \lim_{x\to 0+} x^2\ln(x^2) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x^2)}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x\cdot x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0+} -x^2 = 0$

Páros függvény (x^2 páros függvény, és ennek egy függvénye.)
Monotonitás $f'(x) = 2x\ln(x^2) + \frac{x^2}{x^2}2x = 2x\ln(x^2) + 2x$. Ebből meghatározzuk a szélsőértékeinek a helyét $0 = 2x\ln(x^2) + 2x = 2x(\ln(x^2) + \ln(e)) = 2x\ln(e \cdot x^2)$. Tehát az $x = 0$ és $e \cdot x^2 = 1$. Azaz $x = \pm e^{-1/2}$ helyen tűnik el a detivált, mivel az $x = 0$-nál nincs értelmezve sem a függvény, sem a derivált függvény. ($f(-e^{-\frac{1}{2}}) = f(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) = -e^{-1}$).
Konvexitás: $f''(x) = (2x(\ln(x^2) + 1))' = 2(\ln(x^2) + 1) + 2x(\frac{2x}{x^2}) = 2\ln(x^2) + 6 = 2\ln(x^2 \cdot e^3)$ Ebből pedig meghatározhatjuk az inflexiós pontokat $\ln(x^2 \cdot e^3) = 0$ egyenletből: $x^2 \cdot e^3 = 1$, amit tovább alakítva: $x = \pm e^{-3/2}$.

x	$(-\infty,-e^{\frac{-1}{2}})$	$-e^{\frac{-1}{2}}$	$(-e^{\frac{-1}{2}},-e^{\frac{-3}{2}})$	$-e^{\frac{-3}{2}}$	$(-e^{\frac{-3}{2}},0)$	$(0,e^{\frac{-3}{2}})$	$e^{\frac{-3}{2}}$	$(e^{\frac{-3}{2}},e^{\frac{-1}{2}})$	$e^{\frac{-1}{2}}$	$(e^{\frac{-1}{2}},\infty)$
f(x)	$\searrow$, kx	min, kx	$\nearrow$, kx	$\nearrow$, i. p.	$\nearrow$, kv	$\searrow$, kv	$\searrow$, kx	$\searrow$, kx	min, kx	$\nearrow, kx$
f'(x)	-	0	+	+	+	-	-	-	0	+
f"(x)	+	+	+	0	-	-	0	+	+	+

Ebből tudjuk, hogy az $x = \pm e^{-1/2}$ helyeken abszolút minimum hely van, ($f(e(-1/2) = f(-e(-1/2) = -e^{-1}$).
Ezért az értékkészlete az $f(x)$ függvénynek $R(f) = [-e^{-1}, \infty)$.

Mivel $\lim_{x\to-\infty} x^2\ln(x^2) = \lim_{x\to\infty} x^2\ln(x^2) = \infty$, ezért meghatározhatunk hozzá aszimptotát. Az aszimptota meghatározásához számoljuk ki a következő határértékeket:
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\ln(x^2)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x\ln(x^2) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^{-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to-\infty} -2x = \infty$,
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\ln(x^2)}{x} = \lim_{x\to\infty} x\ln(x^2) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} -2x = -\infty$. Ezért nincsenek "valódi" aszimptotája a függvénynek.

8. Határozzuk meg a következő függvények értékészletét! És próbáljuk meg ábrázolni?
   a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1$ b) $g(x) = |x^2 - 6x + 8|$ c) $h(x) = \frac{x}{x+2}$
   d) $i(x) = \frac{3x+2}{x-2}$ e) $j(x) = -2\sin(x)$ f) $k(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$
   g) $l(x) = \log_2 \frac{1}{x+1}$ h) $m(x) = \ln|x|$ i) $n(x) = 2\cos(-2x + 4) - 1$
   j) $o(x) = \frac{1}{2}\sin(3 - x) - 2$ k) $p(x) = \frac{1}{3}\arccos(6 - 3x) + 2$ l) $q(x) = \frac{1}{3}\sinh(3 - x) + \frac{1}{2}$

Megoldás
   a) $R_{f(x)} = [1, \infty)$ b) $R_{g(x)} = [0, \infty)$ c) $R_{h(x)} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ d) $R_{i(x)} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
   e) $R_{j(x)} = [-2, 2]$ f) $R_{k(x)} = [-1, 1]$ g) $R_{l(x)} = \mathbb{R}$ h) $R_{m(x)} = \mathbb{R}$
   i) $R_{n(x)} = [-3, 1]$ j) $R_{o(x)} = [-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}]$ k) $R_{p(x)} = [2, 2 + \frac{\pi}{3}]$ l) $R_{q(x)} = [-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}]$

9. Számítsuk ki az összes aszimptotáját a következő függvényeknek:
   a) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ c) $f(x) = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

Megoldás
   a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Az aszimptota a $-\infty$-ben: $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{(x-1)x} = 1$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-x^2+x}{x-1} = -1$, $y = x - 1$.
Az aszimptota a ∞-ben: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{(x-1)x} = 1$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-x^2+x}{x-1} = -1$, $y = x - 1$.
Az aszimptota a 1-ben: $\lim_{x\to1} \frac{x^2-2x}{x-1} = \pm\infty$, $x = 1$.
   b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Az aszimptota a $-\infty$-ben: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1$, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0$, $y = -x$.
Az aszimptota a ∞-ben: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$, $\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+x^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$, $y = x$.
Az aszimptota a 0-ben: $\lim_{x\to1} \sqrt{1+x^2} = \sqrt{2}$, nincs aszimptota.
   c) $D_f = \mathbb{R} \setminus (-2, 2)$
Az aszimptota a $-\infty$-ben: $\lim_{x\to-\infty} \frac{3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}{x} = -\frac{3}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} 3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1} + \frac{3}{2}x = \lim_{x\to-\infty} \frac{9\frac{x^2}{4}-9-\frac{9}{4}x^2}{3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}-\frac{3}{2}x} = 0$, $y = -\frac{3}{2}x$.
Az aszimptota a ∞-ben: $\lim_{x\to\infty} \frac{3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}{x} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x\to\infty} 3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1} - \frac{3}{2}x = \lim_{x\to-\infty} \frac{9\frac{x^2}{4}-9-\frac{9}{4}x^2}{3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}+\frac{3}{2}x} = 0$, $y = \frac{3}{2}x$.
Az aszimptota a -2-ben: $\lim_{x\to-2} 3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1} = 0$, nincs aszimptota.
Az aszimptota a 2-ben: $\lim_{x\to2} 3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1} = 0$, nincs aszimptota.
   d) $D_f = \mathbb{R} \setminus (-2, -1)$
Az aszimptota a $-\infty$-ben: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x} = -1$, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+2-x^2}{\sqrt{x^2+3x+2}-x} = \frac{3}{2}$, $y = -x + \frac{3}{2}$.
Az aszimptota a ∞-ben: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x} = 1$, $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+2-x^2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x} = \frac{3}{2}$, $y = x + \frac{3}{2}$.
Az aszimptota a -2-ben: $\lim_{x\to-2} \sqrt{x^2+3x+2} = 0$, nincs aszimptota.
Az aszimptota a -1-ben: $\lim_{x\to-1} \sqrt{x^2+3x+2} = 0$, nincs aszimptota.