A1b **6-7. gyakorlat** **2011/12/2**

1. $1-\cos(x)=0$ megoldásai $x=2k\pi$. Számítsuk ki $\lim_{x\to 2k\pi-}\frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 2k\pi-}\frac{1-\cos^2(x)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 2k\pi-}\cos(x)+1=2$. Nyilván a jobb oldali határértéke is ez lesz. Tehát a szakadási helyei megszüntethetőek.

2. A 3 függvényrész folytonos, tehát elég megnézni a 0-ban és 1-ben.
$\lim_{x\to 0-}f=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{2x^2-\sin^2(x)}}{x}=\lim_{x\to 0-}-\sqrt{2-(\frac{\sin(x)}{x})^2}=-1$, $\lim_{x\to 0+}f=\lim_{x\to 0+}ax+b=f(0)=b$. Tehát $b=-1$.
$\lim_{x\to 1-}f=\lim_{x\to 1-}ax-1=a-1$, $\lim_{x\to 1+}f=\lim_{x\to 1+}\sqrt{x}=f(1)=1$. $a=2,\ b=1$

3. $x=1$ függőleges aszimptota.
$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-x}=2$ és $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x-1}-2x=1$. Tehát az aszimptota a ∞-ben $y=2x+1$.
$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-x}=2$ és $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x}{x-1}-2x=1$. Tehát az aszimptota a $-\infty$-ben $y=2x+1$.

4. $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\frac{f(2)-f(2-h)}{h}=f'(-2)+f'(-2)=-6$

5. a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ b) $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$ c) $\frac{5x^4(2x^2+x)-(x^5+1)(4x+1)}{(2x^2+x)^2}$
d) $\frac{1}{\cos^2(x)}$ e) $\cos(x^2+3)(2x)$ f) $\frac{3\tan^2(x)}{\cos^2(x)}$
g) $\frac{\cos(x)x-1-\sin(x)}{x^2}$ h) $\sqrt{x^3}+(x+2)\frac{3}{2}\sqrt{x}$ i) $10(x+\tan(x))^9(1+\frac{1}{\cos^2(x)})$
j) $-\cos(\cos(x^2))\sin(x^2)2x$

6. A -2 pontban az érintőjének meredeksége $f'(-2)=[\frac{2-x}{x^3}](-2)=-\frac{1}{2}$. Az érintő egyenlete: $y=-\frac{1}{2}x+b$. Az $x=-2$ pontban $f(-2)=-\frac{3}{4}$ értékű, azaz $b=-\frac{7}{4}$ és $-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}(-2)-\frac{7}{4}$.

7. Hol lesz 0 az $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{(x+1)^2}$, $x=1$-ben.

8. Deriváljuk le $(x^2y+3xy^3-x)'=(x^2y)'+(3xy^3)'-1=2xy+x^2y'+3y^3+3x3y^2y'-1=(3)'=0$
Helyettesítsük be az $x=-3$, $y=0$, ekkor $9y'(-3,0)-1=0$, így $y'(-3,0)=\frac{1}{9}$. Tehát $y=\frac{1}{9}x+b$ az érintője és az $x=-3$, $y=0$ pont rajta van. Ebből $b=\frac{1}{3}$, és $y=\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}$.

9. Vizsgáljuk $f'(x)$, hol 0.
$\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}=0$ egyenlet megoldása: $x=\pm 2$

	$x<-2$	$-2<x<2$	$2<x$
f'	-	+	-
f	mon. csökk.	mon. nő	mon csökk.

10. $f'(x)=3x^2+12x-15$. Nézzük meg, hogy mikor 0. $x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{12^2+180}-12}{6}=\{-5,1\}$
-5-ben lokális maximuma van, ami $f(-5)=103$ értékű és 1-ben lokális minimuma van a függvénynek, ami $f(1)=-5$. Mivel $-\infty$-ben $-$, ∞-ben $+\infty$. Ezért 3-szor metszi az $f(x)$ az x-tengelyt, azaz 3 valós gyöke van a polinomnak.

11. Megmutatjuk, hogy $f(x)=\tan(x)-x$ monoton nővő $(0,\frac{\pi}{2})$ intervallumon. $f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}-1$ az $x=k\pi$ helyeken vesz fel 0 értéket és az $f(x)$-nek a tan miatt szakadási helyei vannak $\frac{\pi}{k}+k\pi$-ben. Azaz $(0,\frac{\pi}{2})$ intervallumon a függvény monoton. $f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}>0$, tehát monoton növő. Ezért elég megnézni, hogy $f(0)\geqslant 0$.
Röviden az $f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}-1$ a $(0,\frac{\pi}{2})$-n folytonos és pozitív ezért az eredeti függvény monoton nővő, ami implikálja az állítást.

12. $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-2=\frac{2-6\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}$, ami $x=\frac{1}{27}$-nél és 0-nál szakadási helye van, azaz a függvény (meredeksége ∞) függőleges lesz.

	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{1}{27})$	$(\frac{1}{27},\infty)$
f'	$-$	$+$	$-$
f	mon. csökk.	mon. nő	mon. csökk.

Tehát lokális szélsőértéke van 0-ban és $\frac{1}{27}$-ben (minimuma és maximuma).

13. A 9)-es feladatban már kiszámoltuk, hogy $f'(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$. Az $f''(x) = \frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}$, ami $x = 0$ és $x = \pm\sqrt{12}$ helyen vesz fel 0-t.

	$(-\infty, -\sqrt{12})$	$(-\sqrt{12}, 0)$	$(0, \sqrt{12})$	$(\sqrt{12}, \infty)$
f''	-	+	-	+
f	konkáv	konvex	konkáv	konvex

Tehát inflexiós pontja van $\pm\sqrt{12}$ és 0 pontban.

14. Az értelmezési tartomány $D_f = \mathbb{R}/\{0\}$.
$f'(x) = \frac{x^3-2}{x^3}$, 0 lesz $x = \sqrt[3]{2}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, \infty)$
f'	+	-	+
f	mon. nő	mon. csökk.	mon. nő

Lokális maximuma van $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.
$\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f = \infty$ $\lim_{x\to 0+} f = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f = \infty$. Tehát az értelmezési tartománya $R_f = \mathbb{R}$.
$f''(x) = \frac{6}{x^4}$ Ez pedig mindig negatív. Azaz a függvény mindenhol konkvex.