A1b **9-10. gyakorlat** **2011/12/2**

1. Osszuk el maradékosan az $f(x)$ polinomot $g(x)$-szel, ha

a)
$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & +3x^2 & -x & +1) & \div(x^2+x) = & x \\
\ominus x^3 & \ominus x^2 & & & & \\
\hline
 & 2x^2 & -x & +1 & & +2 \\
 & \ominus 2x^2 & \ominus 2x & & & \\
\hline\hline
 & & -3x & +1 & &
\end{array}$$

$x^3+3x^2-x+1=(x^2+x)(x+2)+(-3x+1)$

b)
$$\begin{array}{lllllll}
(x^4 & +4x^3 & & +2x & +1) & \div(x^2+2) = & x^2 \\
\ominus x^4 & & \ominus 2x^2 & & & & \\
\hline
 & +4x^3 & -2x^2 & +2x & +1 & & 4x \\
 & \ominus 4x^3 & & \ominus 8x & & & \\
\hline
 & & -2x^2 & -6x & +1 & & -2 \\
 & & \oplus 2x^2 & & \oplus 4 & & \\
\hline\hline
 & & & -6x & +5 & &
\end{array}$$

$x^4+4x^3+2x+1=(x^2+2)(x^2+4x-2)+(-6x+5)$

c)
$$\begin{array}{llllll}
x^4 & -5x^2 & -x & +2 & \div(2x^3+x+1) = & \frac{x}{2} \\
\ominus x^4 & \ominus \frac{1}{2}x^2 & \ominus \frac{1}{2}x & & & \\
\hline\hline
 & -\frac{11}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +2 & &
\end{array}$$

$x^4-5x^2-x+2=(2x^3+x+1)\frac{x}{2}+(-\frac{11}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2)$

d)
$$\begin{array}{llllllll}
x^5 & & +2x^3 & & & +1 & \div(x^2+x+1) = & x^3 \\
\ominus x^5 & \ominus x^4 & \ominus x^3 & & & & & \\
\hline
 & -x^4 & +x^3 & & & +1 & & -x^2 \\
 & \oplus x^4 & \oplus x^3 & \oplus x^2 & & & & \\
\hline
 & & 2x^3 & x^2 & & +1 & & 2x \\
 & & \ominus 2x^3 & \ominus 2x^2 & \ominus 2x & & & \\
\hline
 & & & -x^2 & -2x & +1 & & -1 \\
 & & & \oplus x^2 & \oplus x & \oplus 1 & & \\
\hline\hline
 & & & & -x & +2 & &
\end{array}$$

$x^5+2x^3+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+2x-1)+(-x+2)$

e)
$$\begin{array}{llllll}
(3x^3 & & +x & +2) & \div(x-2) = & 3x^2 \\
\ominus 3x^3 & \oplus 6x^2 & & & & \\
\hline
 & 6x^2 & +x & +2 & & 6x \\
 & \ominus 6x^2 & \oplus 12x & & & \\
\hline
 & & +13x & +2 & & 13 \\
 & & \ominus 13x & \oplus 26 & & \\
\hline\hline
 & & & 28 & &
\end{array}$$

$3x^3+x+2=(x-2)(3x^2+6x+13)+39$

f)
$$\begin{array}{lllllll}
x^4 & & +2x^2 & & +1 & \div(x-3) = & x^3 \\
\ominus x^4 & \oplus 3x^3 & & & & & \\
\hline
 & 3x^3 & +2x^2 & & +1 & & 3x^2 \\
 & \ominus 3x^3 & \oplus 9x^2 & & & & \\
\hline
 & & 11x^2 & & +1 & & 11x \\
 & & \ominus 11x^2 & \oplus 33x & & & \\
\hline
 & & & 33x & +1 & & 33 \\
 & & & \ominus 33x & \oplus 99 & & \\
\hline\hline
 & & & & 100 & &
\end{array}$$

$x^4+2x^2+1=(x-3)(x^3+3x^2+11x+33)+100$

2. Horner-módszer alkalmazásával számítsuk ki a következőket:

a)

	1	0	-5	-1	$+2$
-2	1	$-2\cdot 1+0$	$(-2)^2+(-5)$	$(-1)(-2)-1$	1(-2)+2
		-2	-1	1	0

Azaz a maradék 0. Tehát $(x-2) \mid (x^4-5x^2-x+2)$

b)

	1	-4	-1	10	0	5	2
3	1	$3\cdot 1-4$	$(-1)3+(-1)$	$(-4)3+10$	$-2\cdot 3+0$	$-6\cdot 3+5$	$-13\cdot 3+2$
		-1	-4	-2	-6	-13	-37

Így $f(3)$ értéke -37.

c) Először osszuk el a (x^5-2x^2+x+1)-et $(x-1)$-gyel.

	1	0	0	-2	1	1
1	1	$1\cdot 1+0$	$1\cdot 1+0$	$1\cdot 1-2$	$-1\cdot 1+1$	$0\cdot 1+1$
		1	1	-1	0	1

Tehát $x^5-2x^2+x+1=(x-1)(x^4+x^3+x^2-x)+1$.
Most osszuk el $(x^4+x^3+x^2-x)$-et $(x+1)$-gyel:

	1	1	1	-1	0
-1	1	$1\cdot(-1)+1$	$0\cdot(-1)+1$	$1\cdot(-1)-1$	$-2\cdot(-1)+0$
		0	1	-2	2

Tehát $x^4+x^3+x^2-x=(x+1)(x^3+x-2)+2$. Ezt írjuk vissza 2-be. (Az itteni osztandó megegyezik az ottani hányadossal.)

$$x^5-2x^2+x+1=(x-1)[(x+1)(x^3+x-2)+2]+1=(x^2-1)(x^3+x-2)+(x-1)2+1$$

A maradék $2(x-1)+1=2x-1$.

3. A racionális gyökteszt értelmében, ha $f(x)=3x^5-2x^4+x^2-3x+6$ polinomnak gyöke $\frac{p}{q}$ ($(p,q)=1$), akkor $p \mid 6(=a_0)$ és $q \mid 3(=a_5)$. Azaz racionális gyökei lehetnek: $\pm 6, \pm 2, \pm 3, \pm 1, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}$. Kiszámolva függvény értékeket, viszont azt kapjuk, hogy egyik sem gyök.

4. Keressük meg a gyökeiket:
a) $f(x)=x^4-3x^3+x^2+4$
Próbáljunk találni egy gyököt. A racionális gyökteszt segítségével a lehetséges gyökök: ± 1, ± 2, ± 4.
$f(2)=2^4-3\cdot 2^3+2^2+4=0$.
Tehát a 2 gyöke lesz. Ezért a többi gyök meghatározásához elég viszgálni $\frac{x^4-3x^3+x^2+4}{x-2}$-t.
Végezzük el ezt Horner módszerrel.

	1	-3	1	0	4
2	1	$2\cdot 1-3$	$(-1)\cdot 2+1$	$(-1)\cdot 2+0$	$-2\cdot 2+4$
		-1	-1	-2	0

Keressük $f_1(x)=x^3-x^2-x-2$ gyökeit. Vegyük észre, hogy $f_1(2)=0$. Újra oszthatunk $(x-2)$-vel.

	1	-1	-1	-2
2	1	$2\cdot 1-1$	$1\cdot 2-1$	$1\cdot 2-2$
		1	1	0

Legyen $f_2(x)=x^2+x+1$. A gyökeit a másodfokú megoldőképlettel megtalálhatjuk. $x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{1^2-4}-1}{2}$.
Tehát $f(x)$ gyökei kétszer a 2, és egyszer a $\frac{\sqrt{3}i-1}{2}$, $\frac{-\sqrt{3}i-1}{2}$ komplex számok.
b) $g(x)=2x^5-x^4+4x^3-2x^2-6x+3$
A gyökteszt értelmében lehetséges racionális gyökök: ± 3, ± 1, $\pm\frac{3}{1}$, $\pm\frac{1}{2}$. Például $g(1)=0$.
Tehát $g(x)$-et osszuk el $(x-1)$-gyel, a hányadost jelöljük $g_1(x)$-szel.

$$g_1(x)=2x^4+x^3+5x^2+3x-3$$

$g(-1)=0$. Tehát $g(x)$-et osszuk el $(x+1)$-gyel, a hányadost jelöljük $g_2(x)$-szel.

$$g_2(x)=2x^3-x^2+6x-3$$

Harmadfokú polinom, akkor kell lennie legalább egy racionális gyöknek. Ezek lehetnek: ± 3, $\pm 1,5$ ± 1, $\pm 0,5$. $g_2(\frac{1}{2})=0$. Előzőekhez hasonlóan $g_3(x)=\frac{g_2(x)}{2x-1}=x^2+3$. Ennek gyökei könnyen számolható: $\pm\sqrt{3}i$
Most már meg van $g(x)$ összes gyöke: $\{1,-1,\frac{1}{2},\sqrt{3}i,-\sqrt{3}i\}$

5. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat.
a) $\int x^3-3\sqrt{x}+\frac{5}{x^2}dx=\frac{1}{4}x^4-2x^{\frac{3}{2}}-5x^{-1}+C$
b) $\int(x^2-1)(x^3+3x+1)dx=\int x^5+2x^3+x^2-3x-1dx=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x+C$
c) $\int\cos(2x)dx=\frac{1}{2}sin(2x)+C$
d) $\int\sin^2 xdx=\int\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+C$

6. A láncszabály felhasználásábval, illetve helyettesítéses integrálással számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat.

a) $\int \sin(3x-5)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x-5) + C$

b) $\int x\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\sin(x^2+1) + C$

c) Helyettesítsük (x^2+1) helyére t-t, ekkor $t = x^2+1$ egyenletet lederiválva: $\frac{dt}{dx} = 2x$, azaz $\frac{1}{2x}dt = dx$.

$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^5}dx = \int \frac{x^3}{t^5}\frac{1}{2x}dt = \int \frac{x^2}{2t^5}dt = \int \frac{t-1}{2t^5}dt = \int \frac{1}{2t^4} - \frac{1}{2t^5}dt = -\frac{1}{6t^3} + \frac{1}{8t^4} + C = -\frac{1}{6(x^2+1)^3} + \frac{1}{8(x^2+1)^4} + C$

d) Most $t = \sqrt{x}+2$-t helyettesítünk, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ezt átírhatjuk: $dx = 2\sqrt{x}dt = 2(t-2)dt$ alakba.

$\int \sqrt[3]{\sqrt{x}+2}dx = \int t^{\frac{1}{3}}2(t-2)dt = \int 2t^{\frac{4}{3}} - 2t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{6}{7}t^{\frac{7}{3}} - 1,5t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{6}{7}(\sqrt{x}+2)^{\frac{7}{3}} - 1,5(\sqrt{x}+2)^{\frac{4}{3}} + C$

e) Legyen $t = 2x+1$, $\frac{dt}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$.

$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx = \int \frac{\frac{t-1}{2}+1}{2\sqrt[3]{t}}dt = \int \frac{t+1}{4\sqrt[3]{t}}dt = \int \frac{t^{2/3}}{4} + \frac{t^{-1/3}}{4}dt = \frac{3t^{5/3}}{20} + \frac{3t^{2/3}}{8} + C = \frac{3(2x+1)^{5/3}}{20} + \frac{3(2x+1)^{2/3}}{8} + C$

7. Keressük meg azt az $f(x)$ függvényt, amelyre:

a) $\int f'(x)dx = \int 4x + \sin(2x)dx = 2x^2 - \frac{1}{2}\cos(2x) + C$.

Tudjuk, hogy $f(0) = 0$, ebből kiszámíthatjuk C értékét:

$f(0) = -\frac{1}{2} + C$, azaz $C = \frac{1}{2}$ és $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$.

b) $\int\int f''(x)dx\ dx = \int\int 6x^2 + x^{-1,5}dx\ dx = \int 2x^3 - 2x^{-0,5} + c\ dx = 0,5x^4 - 4\sqrt{x} + cx + d$.

Először c meghatározásához: $f'(1) = 2-2+c \Rightarrow c = 2$. $f(1) = 0,5-4+2+d \Rightarrow d = 1,5$.

Azaz $f(x) = 0,5x^4 - 4\sqrt{x} + 2x - 1,5$.