A1b 12. gyakorlat 2011/12/2

1. Számítsuk ki

   a) $\frac{10\pi}{3} > 1$, ezért $arcsin(\frac{10\pi}{3})$ nincs értelmezve.

   b) $\cos(arctg(5)) =$? Nevezzük el $arctg(5)$-t y-nal ($tg(y) = 5$).

   Az $arctg$ függvény értékkészlete $[-\pi/2, \pi/2]$, ezen a tartományon a cos pozitív.
   Ez azért kell, hogy $\cos(x) = \sqrt{\cos^2(x)}$. Ezért kifejezhetjük a $\cos(y)$-t: $\cos(y) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

   c) $\cos(arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$, az $arcsin(x)$ függvény a $[-\pi/2, \pi/2]$ az értékkészlete, ezért a cos( ) függvény végig pozitív és ezért lesz egyenlő $\sqrt{1 - \sin^2(\ )}$.

   d) $(arctg(1 - x^2))' = \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2}$ $\qquad (arctg(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

   e) $(arcsin(\cos(x)))' = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = -1\frac{\sin(x)}{|\sin(x)|}$ $\qquad (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   f) $\cos(2arcsin(-\frac{2}{3})) = 1 - 2\sin^2(arcsin(-\frac{2}{3})) = \frac{1}{9}$

2. Mi az $f(x) = arcsin(\frac{x}{1+x})$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?
   Az $arcsin$ hasában -1 és 1 közötti értékek szerepelhetnek. Azt kell néznünk, hogy $-1 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1$ mikor teljesül. Ez pedig pontosan, akkor igaz ha $x \geq -\frac{1}{2}$. Így a függvény értelmezési tartománya $D_f = [-\frac{1}{2}, \infty)$.
   Az $\frac{x}{1+x}$ a D_f tartományon $[-1, 1)$ értékeket vesz fel. Így az értékkészlet $R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

3. Vizsgáljuk $f(x) = arctg(1 + \frac{1}{x})$ függvényt.
   Értelmezési tartomány $D_f = R \setminus \{0\}$
   Határérték az értelmezési tartomány szélein:

$$\lim_{x\to-\infty} arctg(1 + \frac{1}{x}) = arctan(1) = \frac{\pi}{4} \qquad \lim_{x\to\infty} arctg(1 + \frac{1}{x}) = arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to0-} arctg(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{y\to-\infty} arctan(y) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to0+} arctg(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{y\to\infty} arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

   Nézzük az első deriváltját $f'(x) = \frac{-1}{x^2+(x+1)^2}$. Az f' mindig negatív, azaz a függvény monoton csökkenő.
   Vizsgáljuk a konvexitást: $f''(x) = \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}$. Ez akkor lesz 0, ha $x = -\frac{1}{2}$. Készítsük el a táblázatot:

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \infty)$
f''	$-$		$+$	$+$
f	konkáv	inflexiós pont	konvex	konvex

   Ezek után már meg tudjuk rajzolni a függvényt, ellenőrzésképpen használhatjuk:
   http://rechneronline.de/function-graphs/ ($arctg$ függvény neve (USA) $arctan$-t)

4. Fejezzük ki!

   a) $5^x = e^{\ln(x)}$ $\qquad$ b) $\frac{\ln(10)}{\ln(3)}$ $\qquad$ c) $3^{\ln(x)} = e^{\ln(2)\ln(x)}$

5. Számítsuk ki a következő függvények deriváltjait!

   a) $((x + 1)e^{\ln(2)x})' = 2^x + (x + 1)\ln(2)e^{\ln(2)x} = 2^x + (x + 1)\ln(2)2^x$

   b) $(\log_3 \frac{1}{x})' = (\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\ln(3)})' = \frac{x}{\ln(3)}(-x^{-2}) = \frac{-1}{\ln(3)x}$

   c) $(\sqrt[x]{3x^2 - 6x + 7})' = (e^{\frac{1}{x}\ln(3x^2-6x+7)})' = e^{\frac{1}{x}\ln(3x^2-6x+7)}(\frac{-1}{x^2}\ln(3x^2 - 6x + 7) + \frac{1}{x}\frac{6x-6}{3x^2-6x+7})$

6. L'Hospital szabály alapján: (Ahol alkalamzzuk a szabály, azt jelöljük!)

   a) $\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}$

   b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty$

   c) $\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

   d) $\lim_{x\to0+} x\ln(x) = \lim_{x\to0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to0+} -x = 0$

   e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$

   f) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x} - ctg(x) = \lim_{x\to0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-\cos(x)+x\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(x)+x\cos(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = 0$

   g) $\lim_{x\to0+} x^x = \lim_{x\to0+} e^{\ln(x)x} = e^0 = 1$ (d) alapján)

   h) $\lim_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e$, hiszen $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$