Egy kevés trigonometrikus és hiperbolikus függvény vizsgálat:

Számítsuk ki *arcsin*, *arccos*, *arctg* deriváltjait. Emlékeztetőül az inverz függvény deriváltjának a képlete: $f^{-1'}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. Ez alapján

$arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$ Ha $y = \sin(x)$, akkor ki kell fejeznünk $\cos(x)$-et. A szokásos "trigonmetrikus Pitagorasz-tétellel" $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-y^2}$. (Az arcsin a $[-\pi/2, \pi/2]$-n van értelmezve, a cos itt végig pozitív.)

$$arcsin'(y)) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$arccos'(\sin(x)) = \frac{1}{-\sin(x)}$ Ha $y = \cos(x)$, akkor $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} = \sqrt{1-y^2}$. (Az arccos a $[0, \pi]$-n van értelmezve, a sin itt végig pozitív.)

$$arccos'(y)) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$arctg'(tg(x)) = \cos^2(x)$ Ha $y = tg(x)$, akkor $\cos^2(x)(= \frac{1}{1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}) = \frac{1}{1+tg^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$. (A $\cos^2(x)$ felírása általánosan igaz, mintahogy arctg is az egész tengelyen van értelmezve, és még négyzetgyököt sem vontunk.)

$$arctg'(y)) = \frac{1}{1+y^2}$$

Hiperbolikus függvények

Definíció: $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ és $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} \ldots$

Könnyen ellenőrizhető: $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$. Most pedig nézzük meg a derivált függvényeit és az inverz függvény deriváltjait!

$$sh'(x) = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$$

$$ch'(x) = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$$

$$th'(x) = (\frac{sh(x)}{ch(x)})' = \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} = \frac{1}{ch^2(x)}$$

$arsh'(sh(x)) = \frac{1}{ch(x)}$ Ha $y = sh(x)$, akkor ki kell fejeznünk $ch(x)$-et. Használjuk az előzőleg felírt átalakítást $ch(x) = \sqrt{1+sh^2(x)} = \sqrt{1+y^2}$. (A ch végig pozitív.)

$$arsh'(y)) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$arch'(ch(x)) = \frac{1}{sh(x)}$ Ha $y = ch(x)$, akkor ki kell fejeznünk $sh(x)$-et. Újra: $sh^2(x) = ch^2(x) - 1$. A $ch(x)$ csak pozitív értékeket vesz fel, ezeken pedig a $sh(x)$ mindig pozitív. Így:

$$arch'(y)) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$arth'(th(x)) = ch^2(x)$ Ha $y = th(x)$, akkor ki kell fejeznünk $ch^2(x)$-et.

$$ch^2(x)(= \frac{1}{1-\frac{sh^2(x)}{ch^2(x)}}) = \frac{1}{1-th^2(x)} = \frac{1}{1-y^2}.$$

$$arth'(y)) = \frac{1}{1-y^2}$$

1. Számítsuk ki!

   a) $th(\ln(5)) = \frac{e^{\ln(5)} - e^{-\ln(5)}}{e^{\ln(5)} + e^{-\ln(5)}} = \frac{5-5^{-1}}{5+5^{-1}} = \frac{24}{26}$

   b) $arsh(2) = x$-t akarjuk tulajdonképpen megoldani, $2 = sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

   Tehát ha e^x-et elnevezzük y-nak, $4 = y - y^{-1}$ ennek a pozitív megoldása (e^x mindig pozitív) $y = \sqrt{5} + 2$.
   Ezért $x = \ln(y) = \ln(\sqrt{5} + 2)$

   c) $sh(1) + ch(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} + \frac{e^1 + e^{-1}}{2} = e$

   d) $th(arsh(-3)) = ?$ Fejezzük ki $th(y)$-t $sh(y)$ függvényeként.

$$th(y) = \frac{sh(y)}{ch(y)} = \frac{sh(y)}{\sqrt{1 + sh^2(y)}}$$

   Ez alapján:

$$th(arsh(-3)) = \frac{sh(arsh(-3))}{\sqrt{1 + sh^2(arsh(-3))}} = \frac{-3}{\sqrt{1 + (-3)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

2. Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát és deriváltfüggvényét!

   a) $sh(arccos(x))$

   Az $arccos(x)$ függvény értelmezési tartománya $[0, \pi]$, és $sh(y)$ függvény mindenhol értelmezve van, ezért a függvény értelmezési tartománya $[0, \pi]$.
   $(sh(arccos(x)))' = ch(arccos(x)) \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

   b) $e^x ch(x)$

   Az e^x és a $ch(x)$ függvény is az egész valós tengelyen van értelmezve.
   $(e^x ch(x))' = e^x ch(x) + e^x sh(x)$

   c) $arch(x^3)$

   $arch(y)$ függvény mindenhol értelmezve van(, és az x^3 is).
   $(arch(x^3))' = \frac{3x^2}{\sqrt{x^6-1}}$

3. Számítsuk ki a következő integrálokat! (Nincs a zh anyagában)

   a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+1}} = \dots$

   $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$ szabály alkalmazása alapján: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = arsh(x) + C$
   $\dots = arsh(x-1) + C$

   b) $\int \frac{dx}{2x^2+8x+16} = \frac{1}{8} \int \frac{dx}{(\frac{x+2}{2})^2+1} = \dots$

   $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$ szabály alkalmazása alapján: $\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg(x) + C$
   $\dots = \frac{1}{8} 2 arctg(\frac{x+2}{2}) + C$

   c) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \ln(x^2+2x+2) + \dots$

   A maradék tag kiszámítására $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$ szabály alkalmazása alapján:
   $\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg(x) + C$
   $\dots = \ln(x^2+2x+2) + arctg(x+1) + C$

4. Trigonometrikus vagy hiperbolikus helyettesítéssel számítsuk ki a következő integrálokat!

   a) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

   A helyettesítés legyen $x = \sin(y)$, ekkor $\frac{dx}{dy} = \cos(y)$.
   $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2(y)} \cos(y) dy = \int \cos^2(y) dy = \int \frac{\cos(2y)+1}{2} dy = \frac{\sin(2y)}{4} + \frac{y}{2} + C =$
   $\frac{\sin(y)\cos(y)+y}{2} + C = \frac{x\sqrt{1-x^2}+arcsin(x)}{2} + C$

   b) $\int (x^2+1)^{3/2}$

   A helyettesítés legyen $x = sh(y)$, ekkor $\frac{dx}{dy} = ch(y)$.
   $\int (x^2+1)^{3/2} dx = \int (sh^2(y)+1)^{3/2} ch(y) dy = \int ch^4(y) dy$
   Linearizáljuk: $ch^2(y) = \frac{ch(2y)+1}{2}$ szabályt még egyszer alkalmazva:

$ch^4(y) = \frac{(ch(2y)+1)^2}{4} = \frac{ch^2(2y)+2ch(2y)+1}{4} = \frac{ch(4y)+1}{8} + \frac{2ch(2y)+1}{4}$

$\dots = \int \frac{ch(4y)+1}{8} + \frac{2ch(2y)+1}{4} dy = \frac{sh(4y)}{32} + \frac{3y}{8} + \frac{sh(2y)}{4} + C = \frac{sh(4arsh(x))}{32} + \frac{3arsh(x)}{8} + \frac{sh(2arsh(x))}{4} + C$

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int (x+2)\cos(x)dx = (x+2)\sin(x) + \int \sin(x)dx = (x+2)\sin(x) - \cos(x) + C$

$f = x+2 \quad g' = \cos(x)$

$f' = 1 \quad g = \sin(x)$

b) $\int x\ln x dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

$f' = x \quad g = \ln(x)$

$f = \frac{x^2}{2} \quad g' = \frac{1}{x}$

c) $\int arctg(x)dx = x\,arctg(x) - \int \frac{x}{x^2+1}dx = x\,arctg(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$

$f' = 1 \quad g = arctg(x)$

$f = x \quad g' = \frac{1}{x^2+1}$

d) $\int (x^2-x+2)e^{-x}dx = -(x^2-x+2)e^{-x} + \int (2x-1)e^{-x}dx = -(x^2-x+2)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} + \int 2e^{-x}dx =$

$f = x^2-x+2 \quad g' = e^{-x}$ | $f = 2x-1 \quad g' = e^{-x}$

$f' = 2x-1 \quad g = -e^{-x}$ | $f' = 2 \quad g = -e^{-x}$

$= -(x^2-x+2)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C$

e) $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx = \frac{-\ln(1+x)}{x} + \int \frac{1}{x(1+x)}dx = \dots$

$f' = \frac{1}{x^2} \quad g = \ln(1+x)$

$f = -\frac{1}{x} \quad g' = \frac{1}{1+x}$

Oldjuk meg a $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x}$-et! Beszorozva $x(1+x)$-szel: $1 = A + Ax + Bx$

A konstans egyenlet: $1 = A$, és x együtthatóinak egyenlete: $0 = A + B$. Azaz $A = 1,\ B = -1$

$\dots = \frac{-\ln(1+x)}{x} + \int \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}dx = \frac{-\ln(1+x)}{x} + \ln(x) - \ln(1+x) + C$

f) $\int e^{2x}\sin(3x)dx = \frac{-1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos(3x)dx = \frac{-1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin(3x)dx$

$f = e^{2x} \quad g' = \sin(3x)$ | $f = e^{2x} \quad g' = \cos(3x)$

$f' = 2e^{2x} \quad g = -\frac{\cos(3x)}{3}$ | $f' = 2e^{2x} \quad g = \frac{\sin(3x)}{3}$

Azaz

$\int e^{2x}\sin(3x)dx = \frac{-1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin(3x)dx$

$\frac{13}{9}\int e^{2x}\sin(3x)dx = \frac{-1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x) + C$

$\int e^{2x}\sin(3x)dx = \frac{-3}{13}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{13}e^{2x}\sin(3x) + C$

g) $\int e^{2x}ch(x)dx = e^{2x}sh(x) - 2\int e^{2x}sh(x)dx = e^{2x}sh(x) - 2e^{2x}ch(x) + 4\int e^{2x}ch(x)dx$

$f = e^{2x} \quad g' = ch(x)$ | $f = e^{2x} \quad g' = sh(x)$

$f' = 2e^{2x} \quad g = sh(x)$ | $f' = 2e^{2x} \quad g = ch(x)$

Azaz

$\int e^{2x}ch(x)dx = e^{2x}sh(x) - 2e^{2x}ch(x) + 4\int e^{2x}ch(x)dx$

$-3e^{2x}ch(x)dx = e^{2x}sh(x) - 2e^{2x}ch(x) + C$

$e^{2x}ch(x)dx = \frac{-1}{3}e^{2x}sh(x) + \frac{2}{3}e^{2x}ch(x) + C$