1. Számítsuk ki a következő egyszerű integrálokat:
a) $\int x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 5\sin(6x) - 2^x dx$ b) $\int \cos(x) - 3\sqrt[3]{x} + \frac{x^2+1}{2x} dx$ c) $\int \frac{4e^{3x} - e^{-x}}{e^{2x}} dx$ d) $\int \mathrm{tg}^2(x) dx$

**Megoldás**

1) a) $\int x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 5\sin(6x) - 2^x dx = \int x^2 dx + \int x^{-1/2} dx + \int 5\sin(6x) - 2^x dx = \frac{x^3}{3} + 2 \cdot x^{1/2} - \frac{5}{6}\cos(6x) - \frac{2^x}{\ln(2)} + C$, mert $\ln(2)2^x = (2^x)'$, így $\ln(2)\int 2^x dx / = \int (2^x)' dx = 2^x + C$.

1) b) $\int \cos(x) - 3\sqrt[3]{x} + \frac{x^2+1}{2x} dx = \int \cos(x) dx - 3\int x^{1/3} dx + \int \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} dx = -\sin(x) - 3 \cdot \frac{3}{4} x^{4/3} + \frac{x^2}{4} + \frac{\ln(2x)}{2} + C$

1) c) $\int \frac{4e^{3x} - e^{-x}}{e^{2x}} dx = \int \frac{4e^{3x}}{e^{2x}} - \frac{e^{-x}}{e^{2x}} dx = \int 4e^x - e^{-3x} dx = 4e^x - \frac{1}{-3} e^{-3x} + C$

1) d) $\int \mathrm{tg}^2(x) dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} dx = \mathrm{tg}(x) - x + C$

2. Határozzuk meg a következő függvények integrálját az $y = ax + b$ helyettesítéssel vagy $\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$ szabállyal.
a) $\int (2x+9)^7 dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{3-6x}} dx$ c) $\int \cos(7x + \pi) dx$ d) $\int \frac{dx}{\sin^2(\pi - 3x)}$

**Megoldás**

2) a) $\int (2x+9)^7 dx = \frac{(2x+9)^8}{8 \cdot 2} + C$, hiszen $f(x) = x^7$, primitív függvénye az $F(x) = \frac{x^8}{8}$, és $a = 2$; VAGY
$\int (2x+9)^7 dx = \int (y)^7 \frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\int y^7 dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^8}{8} + C = \frac{(2x+9)^8}{8 \cdot 2} + C$, mert $y = 2x + 9$, így $\frac{dy}{dx} = 2$, ebből $dx = \frac{dy}{2}$.

2) b) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{3-6x}} dx = \frac{(3-6x)^{4/5}}{\frac{4}{5} \cdot -6} + C = -5\frac{(3-6x)^{4/5}}{24} + C$, hiszen $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = x^{-1/5}$, primitív függvénye az $F(x) = \frac{5}{4} x^{4/5}$ és $a = -6$; VAGY
$\int \frac{1}{\sqrt[5]{3-6x}} dx = \int (3-6x)^{-1/5} dx = \int y^{-1/5} \frac{dy}{-6} = \frac{1}{-6}\int y^{-1/5} dy = \frac{1}{-6} \cdot \frac{y^{4/5}}{4/5} + C = -5\frac{(3-6x)^{4/5}}{24} + C.$

2) c) $\int \cos(7x + \pi) dx = \frac{\sin(7x+\pi)}{7} + C$, hiszen $f(x) = \cos(x)$, primitív függvénye az $F(x) = \sin(x)$ és $a = 7$; VAGY
$\int \cos(7x+\pi) dx = \int \cos(y) \frac{dy}{7} = \frac{1}{7}\int \cos(y) dy = \frac{1}{7}\sin(y) + C = \frac{\sin(7x+\pi)}{7} + C.$

2) d) $\int \frac{dx}{\sin^2(\pi - 3x)} = -\int \frac{-1}{\sin^2(\pi-3x)} dx = -\frac{\mathrm{ctg}(\pi - 3x)}{-3} + C$, hiszen $f(x) = \frac{-1}{\sin^(x)}$, primitív függvénye az $F(x) = \mathrm{ctg}(x)$ és $a = -3$; VAGY
$\int \frac{dx}{\sin^2(\pi-3x)} = -\int \frac{-1}{\sin^2(\pi-3x)} dx = -\int \frac{-1}{\sin^2(y)} \frac{dy}{-3} = \frac{1}{3}\int \frac{-1}{\sin^2(x)} dy = \frac{1}{3}\mathrm{ctg}(y) + C = \frac{1}{3}\mathrm{ctg}(\pi - 3x) + C.$

3. Alkalmazzuk az $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$ integrálási szabályt.
a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}$ b) $\int \mathrm{ctg}(x) dx$ c) $\int \mathrm{tg}(3x) dx$ d) $\int \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}} + \frac{x^3}{x^4+7} dx$ e) $\int \frac{dx}{x\ln(x)}$

**Megoldás** 3) a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} = \ln|x^2+3x+5| + C$, ahol $f(x) = x^2 + 3x + 5$, és $f'(x) = 2x + 3$; VAGY
$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} = \int \frac{2x+3}{y} \frac{dy}{2x+3} = \int dyy = \ln|y| + C = \ln|2x+3| + C$, ahol $y = x^2 + 3x + 5$, $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$.

3) b) $\int \mathrm{ctg}(x) dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \ln|\sin(x)| + C$

3) c) $\int \mathrm{tg}(3x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln|\cos(x)| + C$

3) d) $\int \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}} + \frac{x^3}{x^4+7} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{3+e^{2x}} dx + \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+7} dx = \frac{1}{2}\ln|3+e^{2x}| + \frac{1}{4}\ln|x^4+7| + C$

3) e) $\int \frac{dx}{x\ln(x)} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \ln|\ln(x)| + C$

4. Alkalmazzuk az $\int f'(x) f^\alpha(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$ szabályt. $(\alpha \neq -1)$
a) $\int \sin^4(x)\cos(x) dx$ b) $\int x\sqrt{x^2+1} dx$ c) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ d) $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}(x)}}{\cos^2(x)}$ e) $\int \frac{e^{-x}}{(3+e^{-x})^6}$

**Megoldás**

4) a) $\int \sin^4(x)\cos(x) dx = \frac{\sin^5(x)}{5} + C$

4) b) $\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{1/2} dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} + C$

4) c) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int (\ln(x))^1 \frac{1}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$

4) d) $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}(x)}}{\cos^2(x)} = \int (\mathrm{tg}(x))^{1/2} \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\mathrm{tg}^{3/2}(x)}{3/2} + C$

4) e) $\int \frac{e^{-x}}{(3+e^{-x})^6} = -\int -e^{-x}(3+e^{-x})^{-6} = -\frac{(3+e^{-x})^{-5}}{-5} + C = \frac{(3+e^{-x})^{-5}}{5} + C$

5. Parciális integrálással határozzuk meg a következőket:
a) $\int x\sin(2x) dx$ b) $\int \frac{x}{e^{2x}} dx$ c) $\int (x^2+3)e^{4x} dx$ d) $\int e^{3x}\cos(2x) dx$
e) $\int \sin(3x)\sin(7x) dx$ f) $\int \ln(5x) dx$ g) $\int x^2\ln(x) dx$ h) $\int \cos^3(x)\sin^2(x) dx$

**Megoldás**

**Első típus**

5) a) $\int x\sin(2x)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) - \int -\frac{\cos(2x)}{2}dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int\cos(2x)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{2} + C$

$u = x, \Rightarrow u' = 1, v' = \sin(2x) \Rightarrow v = \frac{-\cos(2x)}{2}$

5) b) $\int \frac{x}{e^{2x}}dx = -x\frac{e^{2x}}{2} - \int -\frac{e^{2x}}{2}dx = -\frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{-2} + C$

$u = x \Rightarrow u' = 1, v' = e^{-2x} \Rightarrow v = -\frac{e^{-2x}}{2}$

5) c) $\int(x^2+3)e^{4x}dx = (x^2+3)\frac{e^{4x}}{4} - \int 2x\frac{e^{4x}}{4}dx = e^{4x}\frac{x^2+3}{4} - \frac{2}{4}\int x\cdot e^{4x}dx$

$u = x^2+3 \Rightarrow u' = 2x, v' = e^{4x} \Rightarrow v = \frac{e^{4x}}{4}$

$\int x\cdot e^{4x}dx = x\frac{e^{4x}}{4} - \int\frac{e^{4x}}{4}dx = e^{4x}\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int e^{4x}dx = e^{4x}\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{4x}}{4} + C$

$u = x \Rightarrow u' = 1, v' = e^{4x} \Rightarrow v = \frac{e^{4x}}{4}$

$\int(x^2+3)e^{4x}dx = e^{4x}\frac{x^2+3}{4} - \frac{1}{2}[e^{4x}\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{4x}}{4} + C] = e^{4x}\frac{x^2+3}{4} - e^{4x}\frac{x}{8} + \frac{e^{4x}}{16} + C = e^{4x}[\frac{x^2+3}{4} - \frac{x}{8} + \frac{1}{16}] + C$

**Második típus**:

5) d) $\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{\sin(2x)}{2} - \int 3e^{3x}\frac{\sin(2x)}{2}dx = \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin(2x)dx$

$u = e^{3x}, \Rightarrow u' = 3e^{3x}, v' = \cos(2x) \Rightarrow v = \frac{\sin(2x)}{2}$

$\int e^{3x}\sin(2x)dx = -e^{3x}\frac{\cos(2x)}{2} - \int 3e^{3x}\frac{\cos(2x)}{-2}dx = -e^{3x}\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos(2x)dx =$

$u = e^{3x}, \Rightarrow u' = 3e^{3x}, v' = \sin(2x) \Rightarrow v = \frac{\cos(2x)}{-2}$

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{3}{2}[-e^{3x}\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos(2x)dx]$$

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{4}e^{3x}\cos(2x) - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos(2x)dx]$$

$$\frac{13}{4}\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{4}e^{3x}\cos(2x)$$

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{2}{13}\sin(2x) + \frac{3}{13}e^{3x}\cos(2x)$$

5) e) $\int\sin(3x)\sin(7x)dx = \sin(3x)\frac{\cos(7x)}{-7} - \int 3\cos(3x)\frac{\cos(7x)}{-7}dx = -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{7}\int\cos(3x)\cos(7x)dx$

$u = \sin(3x), \Rightarrow u' = 3\cos(3x), v' = \sin(7x) \Rightarrow v = \frac{\cos(7x)}{-7}$

$\int\cos(3x)\cos(7x)dx = \cos(3x)\frac{\sin(7x)}{7} - \int -3\sin(3x)\frac{\sin(7x)}{7}dx = \frac{1}{7}\cos(3x)\sin(7x) + \frac{3}{7}\int\sin(3x)\sin(7x)dx$

$u = \cos(3x), \Rightarrow u' = -3\sin(3x), v' = \cos(7x) \Rightarrow v = \frac{\sin(7x)}{7}$

$$\int\sin(3x)\sin(7x)dx = -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{7}[\frac{1}{7}\cos(3x)\sin(7x) + \frac{3}{7}\int\sin(3x)\sin(7x)dx]$$

$$\int\sin(3x)\sin(7x)dx = -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{49}\cos(3x)\sin(7x) + \frac{9}{49}\int\sin(3x)\sin(7x)dx]$$

$$\frac{40}{49}\int\sin(3x)\sin(7x)dx = -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{49}\cos(3x)\sin(7x)$$

$$\int\sin(3x)\sin(7x)dx = -\frac{7}{40}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{40}\cos(3x)\sin(7x)$$

**Harmadik típus**

5) f) $\int\ln(5x)dx = \int\ln(5x)\cdot 1dx = \ln(5x)x - \int\frac{1}{5x}xdx = \ln(5x)x - \frac{1}{5}x + C$

$u = \ln(5x) \Rightarrow u' = \frac{1}{5x}\cdot 5 = \frac{1}{x}$ és $v' = 1 \Rightarrow v = x$

5) g) $\int x^2\ln(x)dx = \int\ln(x)x^2dx = \ln(x)\frac{x^3}{3} - \int\frac{1}{x}\frac{x^3}{3}dx = \ln(x)\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int x^2dx = \ln(x)\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C$

$u = \ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ és $v' = x^2 \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

5) h) Elrettentő feladat: **Első lépésként "linearizáljuk"** $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \Rightarrow \cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$ és $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = (1-\sin^2(x)) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\int\cos^3(x)\sin^2(x)dx = \int(\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x))(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x))dx = \int\frac{1}{8}\cos(3x) + \frac{3}{8}\cos(x) - \frac{1}{8}\cos(3x)\cos(2x) + \frac{3}{8}\cos(x)\cos(2x)dx = \frac{1}{8}\frac{\sin(3x)}{3} + \frac{3}{8}\sin(x) - \frac{1}{8}\int\cos(3x)\cos(2x)dx + \frac{3}{8}\int\cos(x)\cos(2x)dx$

$\int\cos(ax)\cos(2x)dx = \cos(ax)\frac{\sin(2x)}{2} - \int -a\sin(ax)\frac{\sin(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\cos(ax)\sin(2x) + \frac{a}{2}\int\sin(ax)\sin(2x)dx$

$u = \cos(ax), \Rightarrow u' = -a\sin(ax), v' = \cos(2x) \Rightarrow v = \frac{\sin(2x)}{2}$

$\int\sin(ax)\sin(2x)dx = \sin(ax)\frac{\cos(2x)}{-2} - \int a\cos(ax)\frac{\cos(2x)}{-2}dx = -\frac{1}{2}\sin(ax)\cos(2x) + \frac{a}{2}\int\cos(ax)\cos(2x)dx$

$u = \sin(ax), \Rightarrow u' = a\cos(ax), v' = \sin(2x) \Rightarrow v = \frac{\cos(2x)}{-2}$

$$\int\cos(ax)\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\cos(ax)\sin(2x) + \frac{a}{2}[-\frac{1}{2}\sin(ax)\cos(2x) + \frac{a}{2}\int\cos(ax)\cos(2x)dx]$$

$$\int\cos(ax)\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\cos(ax)\sin(2x) - \frac{a}{4}\sin(ax)\cos(2x) + \frac{a^2}{4}\int\cos(ax)\cos(2x)dx]$$

$$\frac{4-a^2}{4}\int \cos(ax)\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\cos(ax)\sin(2x) - \frac{a}{4}\sin(ax)\cos(2x)$$

$$\int \cos(ax)\cos(2x)dx = \frac{2}{4-a^2}\cos(ax)\sin(2x) - \frac{a}{4-a^2}\sin(ax)\cos(2x)$$

$$a = 3 \Rightarrow \int \cos(3x)\cos(2x)dx = \frac{2}{-5}\cos(-5x)\sin(2x) - \frac{3}{-5}\sin(-5x)\cos(2x)$$

$$a = 1 \int \cos(x)\cos(2x)dx = \frac{2}{3}\cos(x)\sin(2x) - \frac{1}{3}\sin(x)\cos(2x)$$

$\int \cos^3(x)\sin^2(x)dx = \frac{1}{8}\frac{\sin(3x)}{3} + \frac{3}{8}\sin(x) - \frac{1}{8}[\frac{2}{-5}\cos(-5x)\sin(2x) - \frac{3}{-5}\sin(-5x)\cos(2x)] + \frac{3}{8}[\frac{2}{3}\cos(x)\sin(2x) - \frac{1}{3}\sin(x)\cos(2x)] + C$

6. Parciális törtekre bontással határozzuk meg a következő integrálokat
   a) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$ b) $\int \frac{dx}{x^2+x-6}$ c) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}dx$ d) $\int \frac{dx}{x^4-81}$

**Megoldás**

6) a)

$$\frac{1}{\underline{x^2-4}} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \underline{\frac{(A+B)x + 2A - 2B}{x^2-4}}$$

Az aláhúzott részt rendezve: $1 = (A+B)x + 2A - 2B$, mint polinom, azaz minden $x$-re. Tehát $x^k$ együtthatói megegyeznek: $x^1$-nek $0 = A+B$, $x^0$-nak $1 = 2A - 2B$. Megoldva $A = 1/4$, $B = -1/4$.
$\int \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4}\int(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2})dx = \frac{1}{4}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) + C$.
6) b) $x^2 + x - 6 = 0$ két megoldása $-3, 2$. Így parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

alakban. Ugyanúgy megoldjuk $A, B$-re: $A = -B = 1/5$.
$\int \frac{dx}{x^2+x-6} = \frac{1}{5}\int(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3})dx = \frac{1}{5}(\ln|x-2| - \ln|x+3|) + C$
6) c) $x^2 + 2x + 3 = 0$-nak nincs valós megoldása! Az $\frac{1}{1+y^2}$ és a $\frac{2y}{1+y^2}$ függvényeknek ismerjük a primitív függvényeit bontsuk fel ilyenekre. ($(x+1)^2 + 2 = \frac{1}{2}\big((\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2 + 1\big)$, tehát $y = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$, ami szerencsére lineáris (2)-es feladat).)
$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\sqrt{2}(\frac{x+1}{\sqrt{2}})}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1} + \frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}dx = \frac{1}{2}2\ln((\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2 + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + \mathrm{C}$
6) d) $x^4 - 81 = (x^2+9)(x-3)(x+3)$. Parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{x^4-81} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+9} = \frac{x^3(A+B+C) + x^2(3A-3B+D) + x(9A+9B-9C) + (27A-27B-9D)}{x^4-81}.$$

Megoldjuk a 4 ismeretlenes 4 egyenletből álló egyenletrendszert: $A = 1/99$, $B = -1/99$, $C = 0$, $D = -5/99$.
$\int \frac{dx}{x^4-81} = \frac{1}{99}(\int \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} + \frac{-5}{x^2+9}dx) = \frac{1}{99}(\ln|x-3| - \ln|x+3| - \frac{5}{3}\mathrm{arctg(x/3)}) + \mathrm{C}$

7. Oldjuk meg helyettesítéssel a következő integrálokat:
   a) $\int \sqrt{1-x^2}dx$ b) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ c) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$ d) $\int \sqrt{5+3x^2}dx$
   e) $\int \frac{2e^2x+3e^x}{e^{2x+1}}dx$ f) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$ g) $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}+2x+\sqrt[3]{x^2}}dx$

**Megoldás**

7) a) $x := \cos y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\sin y \Rightarrow dx = -\sin(y)dy$. Cseréljük le $x$-et és $dx$-et:
$\int \sqrt{1-x^2}dx = -\int \sin^2(y)dy$, amit parciális integrálással kiszámolhatunk (2. típusúként vagy linearizálva).
$\int \sin^2(y)dy = -\sin(y)\cos(y) + \int \cos^2(y)dy = -\sin(y)\cos(y) + \int 1 - \sin^2(y)dy$, ahol a parciális deriválásnál $f'(y) = \sin(y), g(y) = \sin(y) \Rightarrow f(y) = -\cos(y), g'(y) = \cos(y)$. Rendezzük át:

$$\int \sin^2(y)dy = \frac{1}{2}(-\sin(y)\cos(y) + y) + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = -\int \sin^2(y)dy = \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2}x - \arccos(x)) + C$$

7) b) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int \sqrt{1-(x/a)^2}dx$. Most helyettesíthetjük $z = x/a$-t vagy 2-es feladat szabályát alkalmazva:

$$\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}(\sqrt{1-(x/a)^2}x/a - \arccos(x/a)) + C$$

7) c) $x/a = \mathrm{ch(y)} \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{a}}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{sh(y)} \Rightarrow \mathrm{dx} = \mathrm{ash(y)dy}$. Trigonometrikus függvényekhez hasonló összefüggés itt is igaz:

$$\mathrm{sh}^2(\mathrm{y}) - \mathrm{ch}^2(\mathrm{y}) = 1$$

Cseréljük le $x$-et és $dx$-et:

$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = a\int \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}dx = \underline{a\int \mathrm{sh}^2(\mathrm{y})\mathrm{dy}} = a(\mathrm{ch}(\mathrm{y})\mathrm{sh}(\mathrm{y}) - \int \mathrm{ch}^2(\mathrm{y})\mathrm{dy}) = \underline{a(\mathrm{ch}(\mathrm{y})\mathrm{sh}(\mathrm{y}) - \int \mathrm{sh}^2(\mathrm{y}) - 1\mathrm{dy})}$
Átrendezve: $\int \mathrm{sh}^2(\mathrm{y})\mathrm{dy} = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(\mathrm{y})\mathrm{sh}(\mathrm{x}) - \mathrm{y}) + \mathrm{C}$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = a\int \mathrm{sh}^2(\mathrm{y})\mathrm{dy} = \frac{\mathrm{a}}{2}(\mathrm{ch}(\mathrm{y})\mathrm{sh}(\mathrm{y}) - \mathrm{y} + \mathrm{C}) = \frac{\mathrm{a}}{2}(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\sqrt{1+\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2}} - \mathrm{arch}(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}) + \mathrm{C})$$

7) d) $\int \sqrt{5+3x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\int \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}}\right)^2}dx\right)$. Vegyük észre, hogy ez a furcsa alak a 7)c) feladatban szerepel: $\frac{\sqrt{3}}{5}$-tel van beszorozva a piros kifejezés és $a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Tehát

$$\int \sqrt{5+3x^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}\sqrt{1+\frac{x^2}{(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}})^2}} - \mathrm{arch}\left(\frac{\mathrm{x}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}\right) + \mathrm{C}\right)\right)$$

7) e) Oldjuk meg a $t = e^x$ helyettesítéssel. Így $\frac{dt}{dx} = e^x$ és $dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{1}{t}dt$

$$\int \frac{2e^2x+3e^x}{e^{2x+1}}dx = \int \frac{2t^2+3t}{et^2}\frac{1}{t}dt = \int \frac{2}{e}\frac{1}{t} + \frac{3}{et^2}dt = \frac{2}{e}\ln|t| - \frac{3}{et} + C = \frac{2}{e}\ln|e^x| - \frac{3}{ee^x} + C$$

7) f) Oldjuk meg a $t = e^x$ helyettesítéssel. Így $\frac{dt}{dx} = e^x$ és $dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{1}{t}dt$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{t}{t^2-1}\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{t^2-1}dt \overset{\text{parc. tört.-re b.}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}dt =$$
$$= \frac{1}{2}\big(\ln|t-1| - \ln|t+1|\big) + C = \frac{1}{2}\big(\ln|e^x-1| - \ln|e^x+1|\big) + C$$

7) g) Oldjuk meg a $t = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel. Így $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3t^2}$ és $dx = 3t^2dt$.

$$\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}+2x+\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{1}{t^4+2t^3+t^2}3t^2dt = \int 3(t+1)^{-2}dt = -3(t+1)^{-1} + C = \frac{-3}{\sqrt[3]{x}+1} + C$$

7) h) Oldjuk meg a $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel. Így $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2t}$ és $dx = 2tdt$.

$$\int \sin\sqrt{x}dx = \int 2t\sin t dt \overset{\text{parc. int-sal}}{=} -2t\cos t + \int 2\cos t dt = -2t\cos t + 2\sin t + C = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$$

8. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:
a) $\int_0^1 xdx$ b) $\int_2^3 \ln^2(x)dx$ c) $\int_3^4 \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}dx$ d) $\int_6^7 \frac{dx}{x\ln(x)}$

**Megoldás**

8) a) $\int_0^1 xdx = [x^2/2]_0^1 = 1/2$

8) b) Számítsuk ki parciális integrálással a primitív függvényét: $\int \ln^2(x)dx = x\ln^2(x) - \int x2\ln(x)\frac{1}{x}dx = x\ln^2(x) - (2x\ln(x) - \int 2x\frac{1}{x}dx) = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + C$. A Newton-Leibniz tételt alkalmazva:

$$\int_2^3 \ln^2(x)dx = [x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x]_2^3 = 3\ln^2(3) - 6\ln(3) + 6 - 2\ln^2(2) + 4\ln(2) - 4$$

8) c) $\int_3^4 \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}dx = \int_3^4 e^{5x+1}dx = [\frac{e^{5x+1}}{5}]_3^4 = \frac{e^{21}-e^{16}}{5}$

8) d) $\int_6^7 \frac{dx}{x\ln(x)} = [\ln(\ln(x))]_6^7 = \ln(\ln(7)) - \ln(\ln(6))$