A1 **1. gyakorlat** **2013/2014/2**

1. Oldd meg!
   a) $2x + \sqrt{(2x-1)x^2} = x^2$ b) $2x - \sqrt{(2x-1)x^2} = x^2$
   c) A két egyenletnek ugyanazok a megoldásai?
2. Mi ez?
   a) $\{a \in \mathbb{N} \ : \ \exists k \in \mathbb{N} \ a = 2k\}$ b) $\{a \in \mathbb{N} \ : \ \exists k, l \in \mathbb{N} \ (a-2k)(a-3l) = 0\}$
   c) $\{a \in \mathbb{N} \ : \ \forall n, m, k \in \mathbb{N}, \exists r \in \mathbb{N} \ nm = ak \Rightarrow (n-ar)(m-ar) = 0\}$
   d) Az a számot tökéletesnek nevezzük, ha teljesíti a következőket: $\sum_{\{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists k \in \mathbb{N} \ a = kn\}} n = 2a$. Fogalmazzuk meg szóban (egyszerűsítve), hogy ez mit jelent és adjunk az 1-től különböző példát. (Van másik 1jegyű.)
3. Hozzuk egyszerűbb alakra!
   a) $\frac{\sqrt{a^2b+2ab^2+b^3}}{b^2}$ b) $(\frac{x^{4,5}}{x^3}\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}} + x)^2$ c) $e^{\ln a}$ d) $\ln e^a$
4. A függvények kompozícióját a következőképpen definiáljuk $f \circ g(t) := f(g(t))$. Határzottuk meg $f \circ g(t)$ és $g \circ f(t)$ függvényeket!
   a) $f(x) = e^x - \sin(x)x^2 + 3$, $g(x) = \sqrt[5]{x}$ b) $f(x) = e^x - \sin(x)x^2 + 3$, $g(y) = \sqrt[5]{x}$
   c) $f(x) = e^x - \sin(x)y^2 + 3$, $g(y) = (5x+y)^2$ d) $f(x) = e^x \sin(x)y^2 + 3$, $g(x) = (5x+y)^2$
5. Oldjuk meg teljes indukcióval!
   a) $1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$
   c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ d) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$
   e) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ f) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\dots(k+t-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+t)}{t+1}$
6. Vezessük le a logaritmus azonosságokat!
   a) $\mathrm{log(a) + log(b) = log(ab)}$ b) $\mathrm{log(a^k) = k \ log(a)}$ c) $\mathrm{log_n(a) = \frac{log_k(a)}{log_k(n)}}$
7. Mikor teljesül?
   a) $\sqrt{x^2} = x$ b) $(\sqrt{x})^2 = x$ c) $\sin(\arcsin(x)) = x$ d) $\arcsin(\sin(x)) = x$
   e) $\cos(\arccos(x)) = x$ f) $\arccos(\cos(x)) = x$ g) $\tan(\arctan(x)) = x$ h) $\arctan(\tan(x)) = x$
8. A $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ felhasználásával bizonyítsuk be, hogy $\pm\cos\arcsin x = \pm\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$.
9. Vezessük be a következő függvényeket $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ és $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (magyar rövidítés sh(x) illetve ch(x)). Bizonyítsuk be a következő összefüggéseke!
   a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ b) $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
   c) $\cosh(2x) = \sinh^2(x) + \cosh^2(x)$
10. Mikor teljesül?
    a) $\mathrm{arsinh\,sinh(x) = x}$ b) $\mathrm{sinh\,arsinh(x) = x}$ c) $\mathrm{arcosh\,cosh(x) = x}$ d) $\mathrm{cosh\,arcosh(x) = x}$