1. Pót ZH

~~TÓTH ZSÓFIA SZONJA~~
[redacted]

①

$$\lim_{n\to\infty} a_n \underset{/:n^4}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2-13/n\right)^4}{\sqrt{1+\frac{17}{n^7}} - \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^8}}} = 2^4$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \cancel{\sqrt[n]{\left(\frac{2^4}{n^{3/2}}\right)^n + \frac{n!}{n^{1{,}5n}}}}$$

$\to$ ~~elhanyagol~~ $n! << n^n$ tudjuk

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{2^{4n}+n!}{n^4}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt[n]{\left(\frac{2^4}{n}\right)^n + \frac{n!}{n^4}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

(<1, <1)

$\lim_{n\to\infty} b_n \geq 0$, mert b_n poz $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

- $\left|\{(n,m) \mid b_n \geq a_m\}\right| < \infty \Leftarrow$ A kérdés, hogy ez teljesül-e

Most $b_1 = 17 \Rightarrow \varepsilon = 1\ \exists M(\varepsilon) : m > M(\varepsilon)\quad a_m \in [17, 15]$

$\Rightarrow \{(1,m) \mid m > M(\varepsilon)\} \subseteq \{(n,m) \mid b_n \geq a_m\}$

Ez már „∞ db" $\Rightarrow$ nem lehet véges sok az egész halmaz számossága.

- inf $a_m > 0$ eldöntésére átfogalmazható a kérdés, mivel $b_n \to 0$, ezért ~~[illegible]~~ bármely poz. szám esetén (így inf a_m-re is) létezik n_0, hogy $b_{n_0} <$ a poz. szám. $\Rightarrow$ $b_{n_0} < \inf a_m < a_m$ $\forall m$-re!

Ez igaz.
$\to$ 1. indoklás: ha $\exists \min a_m \Rightarrow$ akkor az valamelyik a_m, azok pedig $+$ ✓

ha $\nexists \min a_m \Rightarrow \inf a_m$ torlódási pont, mivel van két a sorozatnak, akkor ez a határérték lesz, azaz $1/6 > 0$ ✓

$\to$ 2. indoklás, ha $n > 13 \Rightarrow a_n > \frac{n^4}{\sqrt{n^8+n^8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \inf a_n = \min\{a_1, \dots, a_{12}, a_{13}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ ezek poz $\Rightarrow$ inf$(a_n) > 0$

Tehát igaz.

②

i) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-(2-3n)+4}{2-3n}\right)^{5n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{5n} \cdot \left(1 - \frac{4}{2-3n}\right)^{5n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^{5n} \left[\left(1-\frac{4}{2-3n}\right)^{-\frac{2-3n}{4}}\right]^{-\frac{4}{2-3n}\cdot 5n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{20}{3} \quad D\ !$$

ii) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}\right]^{\ln n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n} = \infty \quad D$$

1(i) Mindkétszer kihasználtuk, h $\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^{b_n/a_n}$

ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \emptyset$!

"Rendes" megoldás $\ln n > c$ $\forall c$ számra

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1+ \frac{\ln n}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = e^c$ $\forall c$!

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)^n = \infty$

(3) $a_1 = 1/10$

• Alsó korlát: Ha $a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = \underset{>0}{a_n} \cdot \underset{>0}{3^{3+\sqrt{3+a_n}-a_n}} > 0$!

$a_1 = 1/10 \xRightarrow{\text{telj. ind}} a_n > 0$!

• Monotonitás: Nézzük mikor teljesül hogy

$a_{n+1} > a_n$ / beírjuk a rekurziót

$a_n \cdot 3^{3+\sqrt{3+a_n}-a_n} > a_n$ $/ : a_n \neq 0$

$3^{3+\sqrt{3+a_n}-a_n} > 1$

$3+\sqrt{3+a_n} - a_n > 0$

$\sqrt{3+a_n} > a_n - 3$ $/^2$ ← ell. emiatt!

$3 + a_n > a_n^2 - 6a_n + 9$

$0 > a_n^2 - 7a_n + 6$

$a_{n_{1,2}} = \frac{+7 \pm \sqrt{49-24}}{2}$ ↗ 6, ↘ 1

$0 > a_n^2 - 7a_n + 6 \iff a_n \in [1,6]$

$3 + \sqrt{3+a_n} - a_n > 0 \overset{?}{\iff} a_n \in [1,6]$

↑ ha nem lett volna ^{2}!

$\sqrt{3+a_n} > a_n - 3$ mindig teljesül, ha $a_n < 3$

$\Rightarrow$ monoton nő, ha $a_n \in [-\infty, 3] \cup [1,6]$

$\Rightarrow$ monoton nő, ha $a_n \leq 6$! $\forall n$

Sőt mon. csökk., ha $a_n > 6$ $\forall n$

De az is kijött, ha $a_n \leq 6 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

ha $a_n > 6 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

de $a_2 \geq 6 \Rightarrow$ a sorozat nem mon. növő!

A1-es tudásunk alapján nem jutunk tovább, lehet, h konvergens lehet, h nem.

④

② i) $\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-5)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}}\right)^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{e^2}\right)^n$

$\frac{5}{e^2} < 1 \Rightarrow$ ct. aqeau k. !

$\Rightarrow$ i) AK. $\Rightarrow$ K.

(Természetesen megpróbálhatjuk megmutatni, h Lubnit, de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n$ L a.c.s.a $|c_n| \to 0$, $|c_n|$ mon. csökk.

Tehát $c_n = 5^n \cdot \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$)

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(n\sqrt{n^2+1} - n^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2} \ne 0 \Rightarrow \sum a_n$ D

ii) D

⑤ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n}$

$s_0 = 1$ $s_1 = 1 + \frac{2}{3-1} = 2$ $s_2 = 2 + \frac{4}{9-2} = 2{,}57$ $s_3 = 2{,}5 + \frac{8}{27-3} \approx 2{,}8$

- 1. opció megmutatni, h $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n} < 0{,}1$ $\Rightarrow$ egész rész 2 (valószínűtlen)
- 2. opció: $s_4 = 3{,}11$

$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n} < 0{,}89 \Rightarrow$ egész rész 3

$1{,}89 > \sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n} > 0{,}89 \Rightarrow$ egész rész 4

ha $n > 5 \Rightarrow n < 3^n/2$ ✓

$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n} < \sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - \frac{3^n}{2}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \frac{1}{1-2/3} \approx 0{,}79$

$2\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ geom. összeg képlet $\sum_{n=k}^{\infty} q^n = q^k \cdot \frac{1}{1-q}$

Ha nem jött volna ki, akk. lehet hogy csak rosszul becsültam, és próbálkozhattam volna $n < \frac{3^n}{3}$ ....

$\Rightarrow$ Egész érték $\underline{\underline{3}}$.