A1 2. gyakorlat 2013/2014/2

1. Határozzuk meg a következő sorozatok határérték a definíció alapján.
   a) $a_n = n^4 - 3n^2 + n + 2$ b) $b_n = \sqrt[3]{n^3 - n^2}$ c) $c_n = \frac{2n}{3n^2+5n+7}$ d) $d_n = \frac{4^n}{34^n+1}$
   e) Legyen e_n az n-ig lévő prímszámok száma osztva n-nel. Határozzuk meg $\epsilon = 0,5$-re és $\epsilon = 0,6$-ra a küszöbindexet.

2. Mikor igaz?
   a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} a_n$ b) $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$
   c) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ d) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
   e) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ f) $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$
3. Adjunk példát a_n, b_n-re úgy, hogy
   a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty,\ \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \pi^3;$
   b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \pi^3;$
   c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pi^3;$
   d) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty,\ lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pi^3;$
   e) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pi^3;$
4. **Racionális törtek** Határozd meg a határértéket!
   a) $a_n = \frac{n^3+2n}{n^3-2n}$ b) $a_n = \frac{n^3+2n^2+n^{13/4}}{n^3-2n-1}$ c) $a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)^2}$
   d) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}{n+1}$ e) $a_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$ f) $a_n = \frac{(n-1)^3-(n+1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$
   g) $a_n = \frac{\sqrt{n^6+1}-\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt[3]{n^4-3}+\sqrt{n+1}}$ h) $a_n = \frac{(2+n)^{100}-n^{100}}{n^{99}}$ i) $a_n = \frac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{99}-10n^2+1}$
5. **Gyöktelenítés** Határozd meg a határértékéket!
   a) $b_n = n(n - \sqrt{n^2+1})$ b) $b_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-3n+2}$ c) $b_n = \sqrt[3]{n^2-n^3} + n$
   d) $b_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ e) $b_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$
6. **Rendőrelv** Határozd meg a határértékéket!
   a) $c_n = n^3 + 2n$ b) $c_n = \sqrt[n+2]{2n+3}$ c) $c_n = \sqrt[n]{10n^2 - 30n + 21}$
   d) $c_n = \sqrt[4n^2]{n^2+3n+4}$ e) $c_n = \sqrt[2n]{\frac{2n-1}{2n+1}}$ f) $c_n = \sqrt[n^2]{n}$
7. Tavalyi (2012/2013/2) zh első feladata! Tekintsük az $a_n = \sqrt{n^4+8n^2+999} - n^2$ képlettel definiált sorozatot. Igaz-e hogy
   a) véges sok kivételtől eltekintve $a_n < \frac{14}{3}$? b) az $a_n > \frac{21}{5}$ egyenlőtlenség végtelen sok n-re teljesül?

A választ indokoljuk!