2. PZH megoldókulcs

①

$$f'(x) = \left(\ln(x^2+1)\,(tg(2x)+8)^{1/2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot\left(tg(2x)+8\right)^{1/2} + \ln(x^2+1)\circ\frac{1}{2}\left(tg(2x)+8\right)^{-1/2}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos^2 2x}}_{(tg\,2x)'}\cdot\underbrace{2}_{(2x)'}$$

$$g'(x) = \left(e^{\frac{1}{2}x\cdot\ln(x^2+1)}\right)' = \sqrt{x^2+1}^{\,x}\circ\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{x}{2}\,\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\right)$$

② $y = \sqrt{x^2-2x+2}$

x_0 ponthoz érintő képlete $\ell(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2-2x+2\right)^{-1/2}\circ(2x-2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$\ell(x) = \frac{x_0-1}{\sqrt{x_0^2-2x_0+2}}\cdot(x-x_0) + \sqrt{x_0^2-2x_0+2}$$

↑ ezen rajta van az ~~...~~ $(2/3, 0)$ pont

$$\Rightarrow 0 = \frac{x_0-1}{\sqrt{x_0^2-2x_0+2}}\left(\tfrac{2}{3}-x_0\right) + \sqrt{x_0^2-2x_0+2} \qquad /\cdot\sqrt{x_0^2-2x_0+2}$$

$$0 = -\cancel{x_0^2} + x_0 + \cancel{x_0^2} - 2x_0 + 2 \quad +\tfrac{2}{3}x_0 - \tfrac{2}{3} \qquad /\cdot 3$$

$$0 = 2x_0 - 3x_0 + 4 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x_0 = 4}} \qquad y_0 = f(x_0) = \sqrt{16-8+2} = \sqrt{10}$$

$(4, \sqrt{10})$ az érintési pont

③ origótól vett távolsága ~~d(x)~~ $(x, f(x))$ pontnak

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(2\sqrt{\ln(x+3)}\right)^2}$$

$d(x)$ minimális $\Leftrightarrow d^2(x)$ minimális

Tehát $t(x) = x^2 + 4\ln(x+3)$ függvényt min.

$f(x) = 2\sqrt{\ln(x+3)}$ értelmezési tartománya $D_f: [-2, \infty)$

$x+3>0 \Rightarrow \underline{x>-3}$, $\ln(x+3)>0 \rightarrow x+3>+1 \Rightarrow \underline{x>-2}$

D_f tartományon kell minimalizálni

$t'(x) = 2x + \frac{4}{x+3}$, $\quad t'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{4}{x+3} = 0$

$$2x^2+6x+4=0$$

$$x^2+3x+2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} \quad \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}$$

~~Tóth Zsófia Szonja~~ [redacted]

Tartomány szélein és az előbb megkapott ~~$\lim_{t\to -2} t(x)$~~ kritikus pontokat kell összehasonlítani

$t(-2) = 4 + 4\cdot \ln 1 = 4$

$t(-1) = 1 + 4\cdot \ln 2$

$\lim_{t\to\infty} t(x) = \infty$

Mivel folyt. fv. min $x=-1$-ben

Érintési pont koordinátája $(-1, f(-1)) = (-1, 2\sqrt{\ln 2})$

(4) $f(x) = x^3 + 48/x^2 \longrightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$

$f'(x) = 3x^2 - 96\cdot x^{-3}$, $3x^2 - 96x^{-3} = 0 \Rightarrow x = 2$

$f''(x) = 6x + 288\cdot x^{-4}$, $6x + 288\cdot x^{-4} = 0 \to x = -\sqrt[5]{48}$

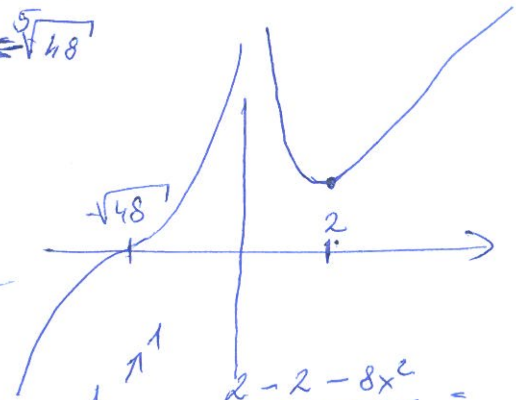
$(f(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[5]{48})$

Monotonitás:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	+	/	−	0	+
f	↗	/	↘	lok min	↗

Konvexitás:

	$(-\infty, -\sqrt[5]{48})$	$-\sqrt[5]{48}$	$(-\sqrt[5]{48}, 0)$	0	$(0,\infty)$
f''	−	0	+	/	+
f	∩		∪	/	∪



(5) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}(2x) - 2x}{x^3} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2 - 2}{3x^2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+4x^2}\cdot\frac{2-2-8x^2}{3x^2} =$

(lehetne L'H, de helyette ↗)

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+4x^2}\,\frac{-8}{3} = -8/3$

(6) $y\cdot e^y = \ln(x) - 1/x$, ha $x > e \Rightarrow$ jobbo. poz. $e^y\cdot$ poz $\Rightarrow y(x)$ poz!

Deriváljuk le: $y'\cdot e^y + y e^y\cdot y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$y'\cdot(y+1)e^y = 1/x + 1/x^2$, ha $x > e \Rightarrow$ jobb o. poz., e^y poz $\Rightarrow y+1$ poz $\Rightarrow y'$ poz!

Deriváljuk le:

$y''\cdot(y+1)e^y + y'(y')\cdot e^y + y'(y+1)\cdot e^y\cdot y' = -\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x^3}$

$\underbrace{y''(y+1)\cdot e^y}_{\text{poz}} = \underbrace{-\frac{1}{x^2} - 2\cdot\frac{1}{x^3}}_{\text{neg}} - \underbrace{(y')^2\cdot(y+2)\cdot e^y}_{\text{ha } x>e \text{ neg}}$ ($(y')^2$: poz, $(y+2)$: poz, e^y: poz)

$\Rightarrow y''$ negatív, ha $x > e$!

$\Rightarrow e < x_1 < x_2$ $\quad \frac{y(x_1) + y(x_2)}{2} < \frac{y(x_1+x_2)}{2}$ a konkáv tulajdonság miatt!