A1 7. gyakorlat 2013/2014/2

Elemi függvények deriváltjai, és deriválási szabályok
$(f+g)' = f' + g'$, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(e^x)' = e^x$ és $(a^x)' = (e^{\ln(a)x})' = e^{\ln(a)x}(\ln(a)x)' = a^x \ln(a)$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ és $(\log_a(x))' = (\frac{\ln(x)}{\ln(a)})' = \frac{\ln(x)'}{\ln(a)} = \frac{1}{x\ln(a)}$
- $(\tan(x))' = (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Inverz függvényderiválási szabálya: $(f^{-1}(f(x)))' = \frac{1}{f'(x)}$. Alkalmazása:
$\arccos(\cos(x))' = \frac{1}{-\sin(x)}$, tehát $\arccos(y)' = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}$
$\arctan(\tan(x))' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \cos^2(x)$, $\arctan(y)' = \frac{1}{1+y^2}$ $(\tan^2(x) + 1 = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)})$

1. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:
   a) $x^2 + 4x + 5 + \frac{1}{x}$; b) $\frac{1}{x^2} + \frac{4x+3}{x^7} + \sin(x)$; c) $e^x + \ln(x) + 10^x + \log_2(x)$.
   d) $\frac{2x+5}{3x-4}$; e) $(1-x)(1+x^2)^{-1}$; f) $\frac{1+x-\sqrt{x}}{x}$;
   g) $\frac{1}{x^2+x+1}$; h) x^3e^x; i) $(x^3 + e^{-x})\sin(x)$.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha f, g és h függvények deriválhatóak, akkor fgh is deriválható (ahol $fgh(x) = f(g(h(x))))$ és a következő alakot veszi fel: $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.
3. Számítsuk ki a $y'(x) = dy/dx$ függvényt:
   a) $y = -10x + 3\cos(x)$ b) $y = \frac{1}{\sin(x)} - 4\sqrt{x} + 7$ c) $y = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{tan(x)}$
   d) $y = \tan(x) - x$ e) $y = \frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$ f) $y = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$
4. Deriváljuk az alábbi implicit függvényeket!
   a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ b) $2x^2 + 4xy + y^2 = 2$ c) $4x^2 - y^2 = 3$ d) $y\sin(x) - x\cos(y) = 16$
5. Deriválás gyakorlása
   a) $2^{\arctan(x^2)}$ b) $x^x + x^{x^x}$ c) $\ln(\ln(\ln(x)))$
   d) $\frac{(x+3)^4 e^{x^3}\cos(\arctan x)}{\sin^2 x^7 \ln(2x+2)^4}$ e) $\tan(\frac{2x}{1+x^2})\sin(\sqrt{1-x^2})$ f) $\sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{(x-2)(x^2+2)}}$
6. Számold ki $\sin^3(x^2e^{-x}\cos(x))$ függvény deriváltját!
7. (4. fejezet 13.) Számoljuk ki $f(x) = \{3x^2 \sin\frac{1}{x},\ \text{ha } x \neq 0,\ 0,\ \text{ha } x = 0\}$ deriváltját, ahol létezik.