Tudnivalók

- Parciális deriváltak jelölései két változós függvények esetében: első rendűek f'_x, f'_y, másod rendűek: f''_{xx}, $f''_{xy} = f''_{yx}$, f''_{yy}.
- Gradiens vektora az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek, egy n dimmenziós vektor, melynek koordinátái az f parciális deriváltjati. Például: f 3-dimenziós, akkor $\mathrm{grad(f)} = \nabla \mathrm{f} = (\mathrm{f}'_\mathrm{x}, \mathrm{f}'_\mathrm{y}, \mathrm{f}'_\mathrm{z})$. Geometriai jelentése: implicit függvény esetén gradiens vektor az érintő sík normálisa; explicit függvény esetén a legmeredekebb irányba mutat, a hosszával jelezve a meredekséget.
- Iránymenti derivált: $\underline{e}$ egységvektor irányában az f függvény iránymenti deriváltja: $f'_{\underline{e}} = \nabla f \cdot \underline{e}$.
- Érintősík egyenlete: $z = f(x,y)$ (explicit) függvény esetén $P = (x_0, y_0, z_0)$ pontban: $f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0) = z - z_0$; a $0 = f(x,y,z)$ (implicit) függvény esetén $P = (x_0,y_0,z_0)$ pontban: $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)^T = 0$.
- Egy nyílt intervallumn ott lehet a többváltozós függvénynek szélsőértéke, ahol az összes parciális derivált 0. ($\nabla f = \underline{0}^T$)
- $f(x,y)$ függvényből képezzük a következő szimmetrikus mátrixot: $\left| \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} \right|$, és annak determinánsát, amit jelöljünk D-vel. Többváltozós függvénynek szélsőértéke van egy nyílt tartományon, ha $D > 0$; nyeregpontja, ha $D < 0$. $D = 0$ esetén nem eldönthető.
- A szélsőérték minimum, ha $f''_{xx} > 0$; és maximum, ha $f''_{xx} < 0$.
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \to (f_1(\underline{x}), f_1(\underline{x}), \ldots, f_m(\underline{x}))^T$ vektor-vektor függvény deriváltja a következő mátrix, úgynevezett Jacobi-mátrix: $D_{f,\underline{x}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x}) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\underline{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{x}) \end{bmatrix}$. Speciálisan egy vektor-skalár függvény esetén a Jacobi mátrix a gradiens vektor lesz.
- Lagrange multiplikátor módszer feltételes szélsőérték feladatok kiszámítására, ha $f(\underline{x})$ függvénynek keressük a szélsőértékét, a következő feltételek mellett: $g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_n(\underline{x}) = 0$, akkor képezzük a következő segédfüggvényt: $F(\underline{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f(\underline{x}) + \lambda_1 g_1(\underline{x}) + \cdots + \lambda_n g_n(\underline{x})$. Keressük meg azokat a pontokat, ahol $F(\underline{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_2)$ összes parciális deriváltja eltűnik, mert ott lehet függvénynek feltételes szélsőértéke.

1. Az előadáson láttuk, hogy az $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$-ban. Lássuk be ezt $g(x) = \frac{x^3 y}{x^6+y^2}$ függvényre is.

2. Számoljuk ki a következő határértékeket, ha tudjuk:
   a) $\lim_{(x,y)\Rightarrow(0,2)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 \cos(y^2)}$ b) $\lim_{(x,y)\Rightarrow(0,0)} (x^2+y^2) \arctan(\frac{x}{y})$ c) $\lim_{(x,y)\Rightarrow(1,1);x\neq 1} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$
   d) $\lim_{(x,y)\Rightarrow(0,0)} \frac{e^y \sin(x)}{x}$ e) $\lim_{(x,y)\Rightarrow(1,1)} \cos(\sqrt[3]{|xy|-1})$ f) $\lim_{(x,y)\Rightarrow(0,0);x\neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

3. Hazározzuk meg a következő felületek szintvonalait!
   a) $f(x,y) = 19 - x^2 - y^2$ b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ c) $f(x,y) = x^2 - y^2$
   d) $z^2 - y^2 = 1$ e) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$ f) $z^2 - x^2 - y^2 = 0$

4. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát és a szintvonalait!
   a) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$ b) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

5. Hol folytonosak az alábbi függvények?
   a) $f(x,y) = \sin(x+y)$ b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ c) $f(x,y) = \ln(\frac{x}{y})$

6. Mik az alábbi függvények parciális deriváltjai?
   a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 1$ b) $f(x,y) = e^{x^2+y^2-1}$ c) $f(x,y) = \arcsin(\frac{x}{y})$
   d) $f(x,y) = \ln_y(x)$ e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ f) $f(x,y) = e^{xy}\ln(y)$

7. Számítsuk ki f''_{xy}-t!
   a) $f(x,y) = 5x^4 - x^3 y + 2x^2 + 3y$ b) $f(x,y) = \sin(x+2y)$ c) $f(x,y) = e^{3x^2+2y}$

8. Határozzuk meg a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait!
   a) $f(x,y) = x\sin(y) + e^y$ b) $f(x,y) = x^2 + 5y + \sin(x) + 7e^x$ c) $f(x,y) = x\ln(xy)$
   d) $f(x,y) = x^2y + \cos(y) + y\sin(x)$ e) $f(x,y) = \ln(x+y)$ f) $f(x,y) = e^{-2y}\cos(2x)$

9. Határozzuk meg láncszabállyal az alábbi függvény t szerinti deriváltját!

$$f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \text{ ahol } x = \cos(t), y = \sin(t), z = 4\sqrt{t}$$

10. Határozzuk meg a függvény iránymenti deriváltjait a P_0 pontban $\underline{a}$ irányában!
   a) $f(x,y) = x^3 - y^3$, $P_0(2,1)$, $\underline{a} = (4,3)$ b) $f(x,y) = xy + e^{x-y}$, $P_0(1,1)$, $\underline{a} = (12,-5)$

11. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyben a függvény az adott pontban leggyorsabban növekszik, ill. csökken.
   a) $f(x,y) = x^3 - y^3$, $P(1,1)$ b) $f(x,y) = x + y + xy$, $P(0,0)$

12. Írjuk fel az érintősíkot a P_0 pontban.
   a) $z = x^2 + y^2$, $P_0(1,1,2)$ b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $P_0(0,0,2)$ c) $z = xy + x + y$, $P_0(1,-1,-1)$

13. Adjuk meg a gradienst a megadott ponton és azt a szintvonalat, mely átmegy a ponton.
   a) $f(x,y) = y - x$, $P_0(2,1)$ b) $f(x,y) = y - x^2$, $P_0(-1,0)$ c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2-1}$, $P_0(1,2)$

14. Határozzuk meg a megadott függvény összes lokális minimumát, maximumát és a nyeregpontokat.
   a) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$ b) $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$
   c) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$ d) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$

15. Keressük meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény abszolút maximumát és minimumát az $x = 0$, $y = 0$ és az $y + 2x = 2$ egyenesek által határolt háromszögben.

16. Keressük meg az $f(x,y) = xy$ és a $g(x,y) = 2x^2 + y^2$ függvények maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ félkörön.

17. Mekkorák a méretei az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszisbe írható legnagyobb kerületű téglalapnak, ha a koordinátatengelyekkel párhuzamosak az oldalai? Mekkora lesz ennek a téglalapnak a területe?

18. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit az adott halmazon:
   a) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$, $T = \{x \geq 0,\ y \geq -2,\ y \leq -\frac{1}{2}x\}$
   b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$, $T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 4\}$
   c) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x + y$, $T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$

19. Oldjuk meg a következő szélsőérték feladatokat!
   a) Mennyi a minimuma $x + y$-nak, ha $xy = 16$ és $y > 0$?
   b) Mennyi a minimuma xy-nak, ha $x + y = 16$?

20. Határozzuk meg az f'_u és f'_v (esetleg f'_w) parciális deriváltakat.
   a) $f(x,y) = 3xy$, $x = \sin(u+v)$, $y = \cos(u+v)$
   b) $f(x,y,z) = xyz$, $x = \ln(u+v)$, $y = u^2 + 3v$, $z = 2uv$
   c) $f(x,y) = \arcsin(xy)$, $x = we^{uv}$, $y = 2u - 3wv$
   d) $f(x,y) = \ln(xy)$, $x = \tan(uv)$, $y = \sqrt{u}$