

Tudnivalók

- Parciális deriváltak jelölései két változós függvények esetében: első rendűek f'_x, f'_y , másod rendűek: $f''_{xx}, f''_{xy} = f''_{yx}, f''_{yy}$.
 - Gradiens vektora az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek, egy n dimenziós vektor, melynek koordinátái az f parciális deriváltjai. Például: f 3-dimenziós, akkor $\text{grad}(f) = \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$. Geometria jelölése: implicit függvény esetén gradiens vektor az érintő sík normálisa; explicit függvény esetén a legmeredekebb irányba mutat, a hosszával jelezve a meredekséget.
 - Iránymenti derivált: $\underline{e}$ egységvektor irányában az f függvény iránymenti deriváltja: $f'_{\underline{e}} = \nabla f \cdot \underline{e}$.
 - Érintősík egyenlete: $z = f(x, y)$ (explicit) függvény esetén $P = (x_0, y_0, z_0)$ pontban: $f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0$; $0 = f(x, y, z)$ (implicit) függvény esetén $P = (x_0, y_0, z_0)$ pontban: $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)^T = 0$.
 - Egy nyílt intervallum ott lehet a többváltozós függvénynek szélsőértéke, ahol az összes parciális derivált 0. ($\nabla f = \underline{0}^T$)
 - $f(x, y)$ függvényből képezzük a következő szimmetrikus mátrixot: $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$, és annak determinánsát, amit jelöljünk D -vel. Többváltozós függvénynek szélsőértéke van egy nyílt tartományon, ha $D > 0$; nyeregpontra, ha $D < 0$. $D = 0$ esetén nem eldönthető.
 - A szélsőérték minimum, ha $f''_{xx} > 0$; és maximum, ha $f''_{xx} < 0$.
 - $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \rightarrow (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))^T$ vektor-vektor függvény deriváltja a következő mátrix, úgynevezett Jacobi-mátrix: $D_{f, \underline{x}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x}) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\underline{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{x}) \end{bmatrix}$. Speciálisan egy vektor-skálár függvény esetén a Jacobi mátrix a gradiens vektor lesz.
 - Lagrange multiplikátor módszer feltételes szélsőérték feladatok kiszámítására, ha $f(\underline{x})$ függvénynek keressük a szélsőértékét, a következő feltételek mellett: $g_1(\underline{x}) = 0, \dots, g_n(\underline{x}) = 0$, akkor képezzük a következő segédfüggvényt: $F(\underline{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(\underline{x}) + \lambda_1 g_1(\underline{x}) + \dots + \lambda_n g_n(\underline{x})$. Keressük meg azokat a pontokat, ahol $F(\underline{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ összes parciális deriváltja eltűnik, mert ott lehet függvénynek feltételes szélsőértéke.
1. Az előadáson láttuk, hogy az $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ függvénynek nincs határértéke a $(0, 0)$ -ban. Lássuk be ezt $g(x) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ függvényre is.
 2. Számoljuk ki a következő határértékeket, ha tudjuk:

a) $\lim_{(x,y) \Rightarrow (0,2)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 \cos(y^2)}$	b) $\lim_{(x,y) \Rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$	c) $\lim_{(x,y) \Rightarrow (1,1); x \neq 1} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$
d) $\lim_{(x,y) \Rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin(x)}{x}$	e) $\lim_{(x,y) \Rightarrow (1,1)} \cos(\sqrt[3]{ xy - 1})$	f) $\lim_{(x,y) \Rightarrow (0,0); x \neq y} \frac{x - y + 2\sqrt{x - 2\sqrt{y}}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

Megoldás

a) $\frac{2}{\cos(4)}$

b) 0

c) -1

d) 1

e) 1

f) 2

3. Hazározzuk meg a következő felületek szintvonalait!

a) $f(x, y) = 19 - x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = x^2 - y^2$

d) $z^2 - y^2 = 1$

e) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$

f) $z^2 - x^2 - y^2 = 0$

Megoldás

a) $(0, 0)$ középpontú körök

b) $(0, 0)$ középpontú körök

c) $(0, 0)$ fókuszpontú hiperbola

d) x tengellyel párhuzamos egyenesek

e) $(0, 0)$ középpontú ellipszisek

f) $(0, 0)$ középpontú körök

4. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát és a szintvonalait!

a) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

Megoldás

a) $D_f = \{(x, y) : y \geq x\}$, szintvonalak: egy meredekségű egyenesek;

b) $D_f = \mathbb{R}^2$, szintvonalak: $(0, 0)$ középpontú körök;

c) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, szintvonalak: $(0, 0)$ középpontú körök.

5. Hol folytonosak az alábbi függvények?

a) $f(x, y) = \sin(x + y)$

b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

c) $f(x, y) = \ln(\frac{x}{y})$

Megoldás

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R} \setminus (0, 0)$

c) $\{(x, y) : x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$

6. Mik az alábbi függvények parciális deriváltjai?

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 1$

b) $f(x, y) = e^{x^2+y^2-1}$

c) $f(x, y) = \arcsin(\frac{x}{y})$

d) $f(x, y) = \log_y(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(y)}$

e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

f) $f(x, y) = e^{xy} \ln(y)$

Megoldás

a) $f'_x(x, y) = 2x - 2y - 1, f'_y(x, y) = -2x + 2y$

b) $f'_x(x, y) = e^{x^2+y^2-1}(2x), f'_y(x, y) = -e^{x^2+y^2-1}2y$

c) $f'_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}y}, f'_y(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}y^2}$

d) $f'_x(x, y) = \frac{1}{x \ln(y)}, f'_y(x, y) = \frac{-x}{y \ln^2(y)}$

e) $f'_x(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}2x, f'_y(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}2y$

f) $f'_x(x, y) = e^{xy} \ln(y)y, f'_y(x, y) = e^{xy} \ln(y)x + e^{xy} \frac{1}{y}$

7. Számítsuk ki f''_{xy} -t!

a) $f(x, y) = 5x^4 - x^3y + 2x^2 + 3y$

b) $f(x, y) = \sin(x + 2y)$

c) $f(x, y) = e^{3x^2+2y}$

Megoldás

a) $f''_{xy} = -3x^2$

b) $f''_{xy} = -2 \sin(x + 2y)$

c) $f''_{xy} = 12xe^{3x^2+2y}$

8. Határozzuk meg a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait!

a) $f(x, y) = x \sin(y) + e^y$

b) $f(x, y) = x^2 + 5y + \sin(x) + 7e^x$

c) $f(x, y) = x \ln(xy)$

d) $f(x, y) = e^{-2y} \cos(2x)$

e) $f(x, y) = \ln(x + y)$

f) $f(x, y) = x^2y + \cos(y) + y \sin(x)$

Megoldás

a) $f''_{xx} = 0, f''_{xy} = \cos(y), f''_{yy} = -x \sin(y) + e^y$

b) $f''_{xx} = 2 - \sin(x) + 7e^x, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = 0$

c) $f''_{xx} = \frac{1}{x}, f''_{xy} = \frac{1}{y}, f''_{yy} = \frac{-x}{y^2}$

d) $f''_{xx} = -4e^{-2y} \cos(2x), f''_{xy} = 4e^{-2y} \sin(2x), f''_{yy} =$

$4e^{-2y} \cos(2x)$

e) $f''_{xx} = \frac{-1}{(x+y)^2}, f''_{xy} = \frac{-1}{(x+y)^2}, f''_{yy} = \frac{-1}{(x+y)^2}$

f) $f''_{xx} = 2y - y \sin(x), f''_{xy} = 2x + \cos(x),$

$f''_{yy} = -\cos(y)$

9. Határozzuk meg láncszabállyal az alábbi függvény t szerinti deriváltját!

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \text{ ahol } x = \cos(t), y = \sin(t), z = 4\sqrt{t}$$

Megoldás $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2}{x^2+y^2+z^2}(-\sin(t) + \cos(t) + \frac{2}{\sqrt{t}})$

10. Határozzuk meg a függvény iránymenti deriváltjait a P_0 pontban $\underline{a}$ irányában!

a) $f(x, y) = x^3 - y^3, P_0(2, 1), \underline{a} = (4, 3)$

b) $f(x, y) = xy + e^{x-y}, P_0(1, 1), \underline{a} = (12, -5)$

Megoldás

a) $\nabla f(x, y) = (3x^2, -3y^2), \nabla f(2, 1) = (12, -3), f'_{\underline{a}} = (12, -3) \cdot (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})^T = \frac{39}{5} = 7,8$

b) $\nabla f(x, y) = (y + e^{x-y}, x - e^{x-y}), \nabla f(1, 1) = (2, 0), f'_{\underline{a}} = (2, 0) \cdot (\frac{12}{13}, \frac{5}{13})^T = \frac{24}{13}$

11. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyben a függvény az adott pontban leggyorsabban növekszik, ill. csökken.

a) $f(x, y) = x^3 - y^3, P(1, 1)$

b) $f(x, y) = x + y + xy, P(0, 0)$

Megoldás

a) $\nabla f(1, 1) = (3x^2, -3y^2)(1, 1) = (3, -3)$, normálva:
 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a "legmeredekebb", $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a "leglankásabb".

b) $\nabla f(0, 0) = (1 + y, 1 + x)(0, 0) = (1, 1)$, normálva:
 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a "legmeredekebb", $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a "leglankásabb".

12. Írjuk fel az érintősíkot a P_0 pontban.

a) $z = x^2 + y^2, P_0(1, 1, 2)$

b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, P_0(0, 0, 2)$

c) $z = xy + x + y, P_0(1, -1, -1)$

Megoldás

a) $\nabla f(1, 1) = (2, 2), 2(x - 1) + 2(y - 1) = z - 2$

b) $\nabla f(0, 0) = (0, 0), 0 = z - 2$

c) $\nabla f(1, -1) = (0, 2), 2(y + 1) = z + 1$

13. Adjuk meg a gradienst a megadott ponton és azt a szintvonalat, mely átmegy a ponton.

a) $f(x, y) = y - x, P_0(2, 1)$

b) $f(x, y) = y - x^2, P_0(-1, 0)$

c) $f(x, y) = e^{x^2+y^2-1}, P_0(1, 2)$

Megoldás

- a) gradiens: $\nabla f(2, 1) = (-1, 1)$, szintvonal: $y = 1 + x$, egyenes
b) gradiens: $\nabla f(-1, 0) = (2, 1)$, szintvonal: $y = -1 + x^2$, egyenes
c) gradiens: $\nabla f(1, 2) = (4e^4, 2e^4)$, szintvonal: $4 = x^2 + y^2 - 1$, kör

14. Határozzuk meg a megadott függvény összes lokális minimumát, maximumát és a nyeregpontokat.

- a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$ b) $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$
c) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$ d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

Megoldás

- a) $f'_x = 4x + 3y - 5 = 0$, $f'_y = 3x + 8y + 2 = 0$ egyenletrendszer megoldása: $x = 2$, $y = -1$;

$$\left| \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} (2, -1) \right| = \left| \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \right| = 4 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 23 \text{ szélsőértéke van, még hozzá minimuma.}$$

- b) $f'_x = 12x - 6x^2 + 6y = 0$, $f'_y = 6y + 6x = 0$ egyenletrendszer megoldásai: $x = 0$, $y = 0$ és $x = 1$, $y = -1$.

$$\left| \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} (0, 0) \right| = \left| \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \right| = 36 \text{ minimumhely. } \left| \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} (1, -1) \right| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \right| = -36 \text{ nyeregpont.}$$

15. Keressük meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény abszolút maximumát és minimumát az $x = 0$, $y = 0$ és az $y + 2x = 2$ egyenesek által határolt háromszögben.

Megoldás A nyílttartományon: $f'_x(x, y) = 2x$ és $f'_y(x, y) = 2y$ parciális deriváltaknak 0-knak kell lennie: $(x, y) = (0, 0)$. A határok vizsgálata:

$x = 0$ egyenesen a függvény: $f(x, y)|_{x=0} = y^2$, $f(x, y)'_{x=0} = 2y \Rightarrow y = 0$; $(0, 0)$

$y = 0$ egyenesen a függvény: $f(x, y)|_{y=0} = x^2$, $f(x, y)'_{y=0} = 2x \Rightarrow x = 0$; $(0, 0)$

$y = 2 - 2x$ egyenesen a függvény: $f(x, y)|_{y=2-2x} = x^2 + (2 - 2x)^2 = 4x^2 - 8x + 4$, $f(x, y)'_{y=0} = 8x - 8 \Rightarrow x = 1$; $(1, 0)$

Összehasonlítandó pontok: $(0, 0)$, $(1, 0)$, ezenkívül még a $(0, 2)$, mert ott érintkezik még két határ görbe. $f(0, 0) = 0$, $f(1, 0) = 2$, $f(0, 2) = 4$. Tehát minimuma van $(0, 0)$ -ban és maximuma $(0, 2)$ -ben.

16. Keressük meg az $f(x, y) = xy$ és a $g(x, y) = 2x^2 + y^2$ függvények maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ félkörön.

Megoldás A nyílttartományon: $f'_x(x, y) = y$ és $f'_y(x, y) = x$ parciális deriváltaknak 0-knak kell lennie: $(x, y) = (0, 0)$. Hasonlóan $g'_x(x, y) = 4x$ és $g'_y(x, y) = 4y$, az $(x, y) = (0, 0)$ -ban lehet szélsőérték. A határok vizsgálata:

$x = 0$ egyenesen a függvények: $f(x, y)|_{x=0} = 0$; $(x, y) = (0, y)$

$g(x, y)|_{x=0} = y^2$, $f(x, y)'_{x=0} = 2y \Rightarrow y = 0$; $(0, 0)$

$x^2 + y^2 = 4$ félegyenesen a függvények: $f(x, y)|_{x^2+y^2=4} = x\sqrt{4-x^2}$, $f(x, y)'_{x^2+y^2=4} = \sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$; $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$;

$g(x, y)|_{x^2+y^2=4} = x^2 + 4$, $f(x, y)'_{x^2+y^2=4} = 2x \Rightarrow x = 0$; $(0, 2)$; (Lagrange multiplikátor módszerrel is lehet.)

Összehasonlítandó pontok f függvényénél: $(0, y)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ és $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. $f(0, y) = 0$, $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -2$, $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2$. Tehát minimuma van $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ -ban és maximuma $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ -ben.

Összehasonlítandó pontok g függvényénél: $(0, 0)$ és $(0, 2)$, ezenkívül még az érintkezési pontoknál: $(-2, 0)$, $(2, 0)$. $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = 4$, $f(-2, 0) = 8$, $f(2, 0) = 8$. Tehát minimuma van $(0, 0)$ -ban és maximuma $(-2, 0)$ és $(2, 0)$ -ban.

17. Mekkora a méretei az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszisbe írható legnagyobb területű téglalapnak, ha a koordinátatengelyekkel párhuzamosak az oldalai? Mekkora lesz ennek a téglalapnak a területe?

Megoldás Mivel a téglalap oldalai párhuzamosak a tengelyekkel, ha meg van adva egy csúcs (x_0, y_0) az ellipszisen, akkor a téglalap meghatározott: a területe pedig $K = 4x_0 + 4y_0$. Tehát az $f(x, y) = 4x + 4y$ függvényt kell maximalizálnunk, a $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ feltétel mellett.

$F(x, y, \lambda) = 4x + 4y + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)$ lesz a segédfüggvény, parciális deriváltjai: $F'_x(x, y, \lambda) = 4 + \lambda(\frac{2x}{a^2})$, $F'_y(x, y, \lambda) = 4 + \lambda(\frac{2y}{b^2})$ és $F'_\lambda(x, y, \lambda) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. A következő egyenletrendszert kell megoldanunk: $\frac{2\lambda}{a^2}x = -4$ $\frac{2\lambda}{b^2}y = -4$ és $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Az első két egyenletből: $x = -\frac{2a^2}{\lambda}$ és $y = -\frac{2b^2}{\lambda}$, behelyettesítve a harmadikba: $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4a^2}{\lambda^2} + \frac{4b^2}{\lambda^2} = \frac{4a^2 + 4b^2}{\lambda^2}$. Így $\lambda = \sqrt{4a^2 + 4b^2}$, $x = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ és $y = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ lesz a téglalap egy pontja. Az oldal hosszai: $2x = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ és $2y = \frac{2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

18. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit az adott halmazon:

- a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$, $T = \{x \geq 0, y \geq -2, y \leq -\frac{1}{2}x\}$
b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$, $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$
c) $f(x, y) = x^3 + y^3 + x + y$, $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$

Megoldás a) $f'_x(x, y) = 4x + 3y - 5$, $f'_y = 3x + 8y + 2$ mindkét parciális derivált eltűnik a $(-2, 1)$ pontban.

A határok vizsgálata: $x = 0$: $f(x, y)|_{x=0} = 4y^2 + 2y$, $f(x, y)'_{x=0} = 8y + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$; $(0, -\frac{1}{4})$
 $y = -2$: $f(x, y)|_{y=-2} = 2x^2 - 6x + 16 - 5x - 4 = 2x^2 - 11x + 12$, $f(x, y)'_{y=0} = 4x - 11 \Rightarrow x = \frac{11}{4}$;
 $(\frac{11}{4}, -2)$
 $y = -\frac{1}{2}x$: $f(x, y)|_{y=-\frac{1}{2}x} = 2x^2 - \frac{3}{2}x^2 + x^2 - 5x - x = \frac{3}{2}x^2 - 6x$, $f(x, y)'_{y=0} = 3x - 6 \Rightarrow x = 3$;
 $(3, -\frac{3}{2})$

Összehasonlítandó pontok: $(-2, 1)$ a határokon: $(0, -\frac{1}{4})$, $(\frac{11}{4}, -2)$, $(3, -\frac{3}{2})$, ezenkívül a metszési pontok $(0, 0)$, $(0, -2)$, $(4, -2)$. $f(-2, 1) = 18$, $f(0, -\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$, $f(\frac{11}{4}, -2) = -\frac{25}{8}$, $f(3, -\frac{3}{2}) = -4$, 5 , $f(0, 0) = 0$, $f(0, -2) = 12$, $f(4, -2) = 0$. Tehát minimuma van $(-3, -\frac{3}{2})$ -ban és maximuma $(-2, 1)$ -ben.

b) A nyílt tartományon: $f'_x = 3x^2 - 9y$, $f'_y(x, y) = 3y^2 - 9x$ eltűnnek: $(0, 0)$, $(3, 3)$. A határok vizsgálata fog következni:

$$x = 0, f(x, y)|_{x=0} = y^3 + 27, f(x, y)'_{x=0} = 3y^2, (0, 0)$$

$$y = 0, f(x, y)|_{y=0} = x^3 + 27, f(x, y)'_{y=0} = 3x^2, (0, 0)$$

$$y = 4, f(x, y)|_{y=4} = x^3 - 36x + 91, f(x, y)'_{y=0} = 3x^2 - 36, (2\sqrt{3}, 4)$$

$$x = 4, f(x, y)|_{y=4} = y^3 - 36y + 91, f(x, y)'_{y=0} = 3y^2 - 36, (4, 2\sqrt{3})$$

$f(0, 0) = 27$, $f(3, 3) = 0$, $f(2\sqrt{3}, 4) = -48\sqrt{3} + 81$, $-2, 13$, $f(4, 2\sqrt{3}) = -48\sqrt{3} + 81$, görbék metszéspontjai: $f(0, 4) = 81$, $f(4, 0) = 81$, $f(4, 4) = 11$.

Tehát minimuma van $(2\sqrt{3}, 4)$ és $(4, 2\sqrt{3})$ -ben és maximuma $(0, 4)$ és $(4, 0)$ -ban.

c) A nyílt tartományon: $f'_x = 3x^2 + 1$, $f'_y(x, y) = 3y^2 + 1$ nem tűnik el. A határok vizsgálata:

$$x = 0, f(x, y)|_{x=0} = y^3 + y, f(x, y)'_{x=0} = 3y^2 + 1$$

$$y = 0, f(x, y)|_{y=0} = x^3 + x, f(x, y)'_{y=0} = 3x^2 + 1$$

$$y = 1 - x, f(x, y)|_{y=1-x} = x^3 + (1-x)^3 + x + (1-x) = x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 + x + 1 - x = 3x^2 - 3x + 2,$$

$$f(x, y)'_{y=1-x} = 6x - 3, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}, \text{ görbék metszéspontjai: } f(0, 0) = 0, f(1, 0) = 2, f(0, 1) = 2.$$

Tehát minimuma van $(0, 0)$ -ban és maximuma $(0, 1)$ és $(1, 0)$ -ban.

19. Oldjuk meg a következő szélsőérték feladatokat!

a) Mennyi a minimuma $x + y$ -nak, ha $xy = 16$?

b) Mennyi a maximuma xy -nak, ha $x + y = 16$?

Megoldás a) Lagrange multiplikátor módszerrel segédfüggvény: $F(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(xy - 16)$, $F'_x = 1 + \lambda y$, $F'_y = 1 + \lambda x$ és $F'_\lambda = xy - 16$. $x = -\frac{1}{\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$, $16 = \frac{1}{\lambda^2}$, $\lambda = \pm \frac{1}{4}$. $(4, 4)$, $(-4, -4)$

A minimum ezek közül a $(-4, -4)$

b) Lagrange multiplikátor segédfüggvénye: $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 16)$, $F'_x = y + \lambda$, $F'_y = x + \lambda$ és $F'_\lambda = x + y - 16$. $x = -\lambda$, $y = -\lambda$, $16 = -2\lambda$, $\lambda = -8$. $(8, 8)$ pontban van a maximuma.

20. Határozzuk meg az f'_u és f'_v (esetleg f'_w) parciális deriváltakat.

$$\text{a) } f(x, y) = 3xy, y = \sin(u + v), y = \cos(u + v) \quad \text{b) } f(x, y, z) = xyz, x = \ln(u + v), y = u^2 + 3v, z = 2uv$$

$$\text{c) } f(x, y) = \arcsin(xy), x = we^{uv}, y = 2u - 3wv \quad \text{d) } f(x, y) = \ln(xy), x = \tan(uv), y = \sqrt{u}$$

Megoldás

$$\text{a) } f'_u(x, y) = \nabla f \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right)^T = (3y, 3x) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = (3 \cos(u + v), 3 \sin(u + v)) \cdot \begin{bmatrix} \cos(u + v) \\ -\sin(u + v) \end{bmatrix} =$$

$$3 \cos^2(u + v) - 3 \sin^2(u + v), f'_v(x, y) = \nabla f \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = (3y, 3x) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right)^T = (3 \cos(u + v), 3 \sin(u + v)) \cdot (\cos(u + v), -\sin(u + v))^T = 3 \cos^2(u + v) - 3 \sin^2(u + v)$$

$$\text{b) } f'_u(x, y, z) = \nabla f \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} = (yz, xz, xy) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{u+v} \\ 2u \\ 2v \end{bmatrix} = (2u^3v + 3uv^2, 2uv \ln(u + v), (u^2 + 3v) \ln(u + v)) \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{u+v} \\ 2u \\ 2v \end{bmatrix} = \frac{2u^3v + 3uv^2}{u+v} + 4u^2v \ln(u + v) + 2v(u^2 + 3v) \ln(u + v),$$

$$f'_v(x, y, z) = \nabla f \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = (yz, xz, xy) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{u+v} \\ 3 \\ 2u \end{bmatrix} = (2u^3v + 3uv^2, 2uv \ln(u + v), (u^2 + 3v) \ln(u + v)) \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{u+v} \\ 3 \\ 2u \end{bmatrix} = \frac{2u^3v + 3uv^2}{u+v} + 6uv \ln(u + v) + 2u(u^2 + 3v) \ln(u + v)$$

$$\text{c) } f'_u(x, y) = \nabla f \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) \cdot \begin{bmatrix} vwe^{uv} \\ 2 \end{bmatrix} = vwe^{uv} \frac{2we^{uv}}{\sqrt{1-(we^{uv}(2u-3wv))^2}} + \frac{4u-6wv}{\sqrt{1-(we^{uv}(2u-3wv))^2}},$$

$$\begin{aligned}
f'_v(x, y) &= \nabla f \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) \cdot \begin{bmatrix} uwe^{uv} \\ 3w \end{bmatrix} = uwe^{uv} \frac{2we^{uv}}{\sqrt{1-(we^{uv}(2u-3wv))^2}} + \frac{6uw-9w^2v}{\sqrt{1-(we^{uv}(2u-3wv))^2}}, \\
f'_w(x, y) &= \nabla f \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix} = \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) \cdot \begin{bmatrix} e^{uv} \\ -3v \end{bmatrix} = 2we^{2uv} \frac{-3we^{uv}}{\sqrt{1-(we^{uv}(2u-3wv))^2}} + \frac{-3w(4u-6wv)}{\sqrt{1-(we^{uv}(2u-3wv))^2}} \\
\text{d) } f'_u(x, y) &= \nabla f \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \left(\frac{y}{xy}, \frac{x}{xy} \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{v}{\cos^2(uv)} \\ \frac{1}{2\sqrt{u}} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\tan(uv)}, \frac{1}{\sqrt{u}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{v}{\cos^2(uv)} \\ \frac{1}{2\sqrt{u}} \end{bmatrix} = \\
&\frac{v}{\sin(uv) \cos(uv)} + \frac{1}{2u}, \\
f'_v(x, y) &= \nabla f \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \left(\frac{y}{xy}, \frac{x}{xy} \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{u}{\cos^2(uv)} \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\tan(uv)}, \frac{1}{\sqrt{u}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{u}{\cos^2(uv)} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{u}{\sin(uv) \cos(uv)}.
\end{aligned}$$