1. Határozzuk meg az $f(x,y) = e^{-x^2+2xy-2y^2}$ függvény kritikus pontjait és szélsőértékeit.

2. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - y$ függvény feltételes szélsőérték helyeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett.

3. Mi lesz az előbbi $f(x,y)$ függvény minimuma és maximuma az origó középpontú 5 sugarú körlapon.

4. Lagrange multiplikátor módszerrel keressük meg az $f(x,y) = x^2 - y^2$ függvény szélsőértékét a $3x+2y = -5$ egyenesen.

5. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2+y^2+2x$ függvény globális szélsőértékeit a $T = \{(x,y) \mid 0 \le x, y \le 3\}$ négyzeten.

§ Kettős integrált hagyma cikkenként kell kiszámolni, belülről kifelé.
Például: $\int_a^b \int_c^d 1 dxdy = \int_a^b (\int_c^d 1 dx)dy = \int_a^b [x]_c^d dy = \int_a^b (d-c)dy = (d-c)[y]_a^b = (d-c)(b-a)$.

6. Számítsuk ki a következő kettős integrálokat!
   a) $\int\int_{\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}} x^2 + y^2 dxdy$
   b) $\int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x+y) dxdy$
   c) $\int_0^1 \int_0^2 x^2 e^{xy} dydx$
   d) $\int\int_{\{(x,y)|0\le x\le 1,\ x^2\le y\le \sqrt{x}\}} x^2 + y^2 dxdy$
   e) $\int\int_{\{(x,y)|0\le x\le 1,\ x\le y\le 3\sqrt{x}\}} \frac{x+1}{y^2+1} dxdy$
   f) $\int\int_{y=\frac{1}{x}, y=x, x=2 \text{által zárt sokszög}} \frac{x^2}{y^2} dxdy$

7. Integráljuk ki a következőket is, ha szükséges, akkor változtassuk meg a változók sorrendjét.
   a) $\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin(x^2) dxdy$
   b) $\int_0^1 \int_x^1 \frac{x \sin(y)}{y} dydx$
   c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt[3]{1+x^3} dxdy$

§ $\int\int_T 1\ dxdy = \text{Terület}(T)$.

8. Mennyi az origó középpontú 1 sugarú kör, az x tengely és az $y = 1 - x$ egyenes által meghatározott tartomány területe.

9. Kezdjük el kiszámolni azokat a területeket, amiket a következő görbék határolnak.
   a) $y = x$, $y = 3x$ és $x = 1$
   b) $y^2 + x^2 = 1$, $y^2 + x^2 = 4$, $y = 0$ és $x = 0$
   c) $y^2 + x^2 = 4$, $y = -x$ és $y = x$
   d) $y^2 + (x-2)^2 = 4$
   e) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $xy = 1$ és $xy = 2$
   f) $(y-2)^2 + (x-3)^2 = 1$

§ Kettős integrálok helyettesítése: ha $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{bmatrix}$, akkor

$$\int\int f(x,y)dxdy = \int\int f(\phi(u,v), \psi(u,v))|\det(\mathrm{J(u,v)})|\mathrm{dudv},$$

ahol $J(u,v) = \begin{bmatrix} \phi_u(u,v) & \phi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{bmatrix}$ a Jacobi mátrix determinánsa. Speciálisan polár koordinátákra való áttérés esetén: $x = r\sin(\phi)$, $y = r\cos(\phi)$, a Jacobi mátrix: $\det(J(u,v)) = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial r \sin(\phi)}{\partial r} & \frac{\partial r \sin(\phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial r \cos(\phi)}{\partial r} & \frac{\partial r \cos(\phi)}{\partial \phi} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \sin(\phi) & r\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \end{bmatrix} \right| = r\sin^2(\phi) - (-r\sin^2(\phi)) = r$

10. Gyakoroljuk az áttérést polár koordinátára.
   a) $\int\int_T y^2 dxdy$, ahol $T = \{(x,y) \mid 0 \le y \le x,\ x^2 + y^2 \le 4\}$
   b) $\int\int_T (x^2 + y^2 - 1)^2 dxdy$, ahol $T = \{(x,y) \mid 0 \le y,\ x^2 + y^2 \le 4\}$

§ Térfogat kiszámítása: $\int\int\int_V 1\ dxdydz = \text{Térfogat}(V)$ vagy ha a testet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tartományon alulról $\phi(x,y)$ és $\psi(x,y)$ felülről és alulról határolja, akkor $\text{Térfogat}(V) \int\int_T \phi(x,y) - \psi(x,y) dxdy$.

11. Számoljuk ki a következő testek térfogatát.
   a) A következő síkok határolják: $y = 0$, $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $z = 0$, $z = 1 - x - y$.
   b) Az $x^2 + y^2 = 1$ alapterületű, a $z = 0$ és $z = 2 - x - y$ síkok által határolt hengert.
   c) A következő felületek határolják: $z = 0$, $z = xy$, $y = 0$, $y = x$, $x = 1$.