A2b 1. gyakorlat 2010/11/2

Elméleti összefoglaló:

- Minden mátrixot lépcsős alakra hozhatunk elemi sorműveletekkel.
- **Elemi sorművelet**: két sor cseréje, az egyik sor minden elemének beszorzása egy rögzített elemmel és az egyik sor valahányszorosának hozzáadása egy másikhoz.
- A lépcsős alakban a lépcsők mindig egy magasak, de nem feltétlenül egy szélesek.
- Lineáris egyenletrendszereket felírhatjuk mátrixos alakba: $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$. Ilyenkor $\underline{\underline{A}}$-t az együttható mátrixnak, $\left[\underline{\underline{A}} \mid \underline{b}\right]$ kibővített mátrixnak hívjuk.
- Ha egy lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk, akkor el tudjuk dönteni, hogy hány megoldása van az egyeneletrendszernek.
  Nincs megoldása, ha van olyan sora, hogy $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mid & c \end{bmatrix}$, ahol $c \neq 0$.
  Pontosan egy megoldása van, ha (nincs olyan sora és) ugyananannyi "lineárisan független" egyenlete van, mint ahány változója.
  Végtelen sok megoldása van, ha (nincs olyan sora és) kevesebb egyenlete van, mint ahány változója.
- Az együttható mátrix oszlopainak a száma megegyezik a változók számával, a kibővített mátrix oszlopainak a száma eggyel több.
- A lépcsős alakban lévő kibővített mátrixban a nem 0 sorok száma a lineárisan független egyenletek számával egyezik meg.

1. Az egyenletrendszer ekvivalens átalakírásaival határozzuk meg a következő egyenletrendszer összes megoldásást! Hány változó értékét választhatjuk meg szabadon? $\begin{bmatrix} 2x & + & y & - & 5z & + & u & = & 3 \\ x & - & y & + & z & + & 2u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 6z & - & u & = & 2 \end{bmatrix}$

2. Döntsük el az egyenletrendszerek kibővített mátrixának lépcsős alakjáról, hogy az egyenletrendszernek hány megoldása van, és ha végtelen sok megoldás van, akkor mondjuk meg a szabad változók számát is.

   a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \mid & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix}$

3. Hozzuk lépcsős alakra a következő mátrixokat!

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

4. Határozzuk meg az egyenletekkel megadott három sík metszetét!

   a) $\begin{array}{lrcrcrcl} S_1: & x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ S_2: & 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ S_3: & x & + & 2y & - & 2z & = & 5 \end{array}$ b) $\begin{array}{lrcrcrcl} S_1: & x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ S_2: & 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ S_3: & & & 3y & + & 7z & = & 2 \end{array}$

5. Melyek vannak redukált lépcsős alakban a következő mátrixok közül? Adjuk is meg a megoldást az ezekhez tartozó egyenletrendszereknek!

   a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & \mid & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \mid & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \mid & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & \mid & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mid & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 2 \end{bmatrix}$

6. Lineárisan összefüggőek-e a $\mathbf{a} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ és $\mathbf{c} = (2, 0, 1)$ vektorok? Ha igen adjunk meg olyan nem triviális kombinációjukat, amely $\underline{0}$.

7. Állítsik elő a $\mathbf{v} = (1, 3, -1, 0)$ vektort az $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, -3, 4, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha az lehetséges.

8. Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő bővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek? $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \mid & 3 \\ -1 & 1 & 1 & \mid & b \\ 0 & 2 & a & \mid & 1 \end{bmatrix}$