A2b 2. gyakorlat 2010/11/2

Elméleti összefoglaló:

- $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \ldots, \underline{v}_n$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \ \Rightarrow \text{minden i-re } \alpha_i = 0.$$
- A kérdés átgofalmazható úgy, hogy $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n & | & 0 \end{bmatrix}$ egyenletrendszernek van a $(0,0,\ldots,0)$-n kívül is megoldása. (∞)
- A mátrix rangja: A mátrix lépcsős lakjában a nem nulla sorok száma. Jele: $r(A)$
- Egyenletrendszer megoldhatóságának vizsgálata rangos feltétellel: $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{x}$-nek V sora van.
$V = r(\underline{\underline{A}}) = r(\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & | & \underline{b} \end{bmatrix})$ pontosan egy megoldása;
$r(\underline{\underline{A}}) < r(\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & | & \underline{b} \end{bmatrix})$ nincs megoldása;
$V > r(\underline{\underline{A}}) = r(\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & | & \underline{b} \end{bmatrix})$ ∞ megoldása van az egyenletrendszernek.

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 8x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$

d) $\begin{array}{rcrcrcrcl} 5x_1 & + & 5x_2 & & & + & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$

e) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & (a+b)x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & ax_3 & = & b \\ -3x_1 & - & 6x_2 & + & (a-b)x_3 & = & 2b \end{array}$

f) $\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2 \end{array}$

2. Számítsuk ki a következő mátrixok rangját.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. Az alábbi vektorok lineárisan függetlenek-e?
   a) $(1,2,1),\ (2,5,0),\ (3,3,8)$ b) $(1,2,-1),\ (6,4,2),\ (4,-1,5)$

4. Az $\mathbb{R}^3$ alábbi részhalmazai alterek-e? Ha igen, adja meg a tér egy bázisát (a teret kifeszítő lineárisan független vektorokat).
   a) $W = \{(a,0,0) \mid\ a \in \mathbb{R}\}$ b) $W = \{(n,m,l) \mid\ n,m,l \in \mathbb{Z}\}$
   c) $W = \{(a,b,c) \mid\ b = a + c\}$ d) $W = \{(a,b,c) \mid\ a + b + c = 1\}$
   e) $W = \{(a,b,c) \mid\ \|(a,b,c)\| \leq 1\}$ f) $W = \{(a,b,c) \mid\ a + b = 0\}$

5. Adottak az $\underline{u} = (0,3,1,-1)$, $\underline{v} = (6,0,5,1)$ és $\underline{w} = (4,-7,1,3)$ vektorok. Adja meg az $S = span\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ lineáris teret kifeszítő vektorokat és a maradék vektort a független vektorok lineáris kombinációjaként.

6. Mutassa meg, hogy lineárisan független vektorok halmazának bármely nem-üres részhalmaza lineárisan független vektorokól áll.

7. Igazoljuk, hogy lineárisan összefüggő vektorok halmazát bármely vektorokkal kibővítve lineárisan összefüggő vektorokat kapunk.

8. Ha $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges vektorok, akkor $\underline{u} - \underline{v}$, $\underline{v} - \underline{w}$, $\underline{w} - \underline{u}$ lineárisan összefüggő vektorok.

9. Adja meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásainak a halmazást, mint alteret (lineárisan független megoldások lineáris kombinációját).

a) $\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 6y & + & 2z & - & 5v & = 0 \\ -x & - & 6y & - & z & - & 3v & = 0 \\ 2x & + & 12y & + & 5z & - & 18v & = 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 2y & - & 2z & - & v & & & = 0 \\ 2x & + & 2y & - & 5z & + & v & - & 7w & = 0 \\ & & y & + & z & - & v & + & w & = 0 \\ -x & + & y & + & 5z & - & v & & & = 0 \end{array}$

10. Adjuk meg az alábbi lineáris terek egy bázisát és dimenzióját.
   a) $T = \{(a,b) \mid\ a + b = 0\}$ b) $U = \{(a,b,c,d) \mid\ a = 0,\ b + c = 0,\ d \in \mathbb{R}\}$
   c) $V = \{(a,b,c) \mid\ a = 2b,\ b = 3c\}$ d) $W = \{(a,b,c) \mid\ a + 2b + c = 0\}$