1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 8x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$

d) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 5x_2 & & & + & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$

e) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & (a+b)x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & ax_3 & = & b \\ -3x_1 & - & 6x_2 & + & (a-b)x_3 & = & 2b \end{array}$

f) $\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2 \end{array}$

1) a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **1) b)** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ **1) c)** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **1) d)** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1) e) Ha $b = 0$ és $a \neq 0$, akkor nincs megoldás. Ha $a = b = 0$, akkor ∞ megoldás van.

1) f) Ha $\lambda \neq 1$, akkor egy megoldás van: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 - \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \\ \frac{\lambda+1}{\lambda+2} - \lambda - 1 \\ \frac{\lambda+1}{\lambda+2} \end{bmatrix}$

2. Számítsuk ki a következő mátrixok rangját.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2) A mátrixot Gauss eliminációs lépésekkel lépcsős alakra hozzuk. A lépcsők száma lesz a rang (ahány 1 magas emelkedés van - ahány nem nulla sor): **a)** 3 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 3.
Vegyük észre, hogy egy mátrix rangja sosom lehet több a sorai vagy az oszlopai számánál.

3. Az alábbi vektorok lineárisan függetlenek-e?

a) $(1, 2, 1),\ (2, 5, 0),\ (3, 3, 8)$ b) $(1, 2, -1),\ (6, 4, 2),\ (4, -1, 5)$

3) $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$ vektorok lineárisan összefüggőek, ha $\sum \alpha_i v_i = 0$-nak van nem triviális megoldása. (Ez ugyanazt jelenti:1. hogy végtelen sok megoldása van az egyenletnek, 2. van másik megolsás az $\alpha_i = 0$-n kívül.)

Mivel a $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$ akkor lesz ∞ megoldása, ha $r(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n & | & \underline{0} \end{bmatrix}) < n$. De $r(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n & | & \underline{0} \end{bmatrix})$ mindig teljesül. Ezért elég azt megnéznünk, hogy: $r(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix})$ kisebb-e n-nél.

a) Lineáris függetlenek, mert a 3 vektorból álló mátrix rangja: 3.
b) Lineáris összefüggők, mert a rang csak 2.

4. Az $\mathbb{R}^3$ alábbi részhalmazai alterek-e? Ha igen, adja meg a tér egy bázisát (a teret kifeszítő lineárisan független vektorokat).

a) $W = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ b) $W = \{(n, m, l) \mid n, m, l \in \mathbb{Z}\}$
c) $W = \{(a, b, c) \mid b = a + c\}$ d) $W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 1\}$
e) $W = \{(a, b, c) \mid \|(a, b, c)\| \leq 1\}$ f) $W = \{(a, b, c) \mid a + b = 0\}$

4) a) Az altér leíró egyenletei: $y = 0,\ z = 0$. Mátrixos alakban az egyenletek: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$ Ez lépcsős alakban van, ezért $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a$. Ebből tudjuk azt is, hogy vektortér és, hogy bázisa: $(1, 0, 0)$.

4) b) Nem vektortér, hiszen bármely W-beli elem $\sqrt{2}$-vel vett szorzata nem lesz benne W-ben.

4) c) Az altér leíró egyenletei: $b = a + c$. Mátrixos alakban az egyenletek: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$ Ez lépcsős alakban van, ezért bevezethetünk két szabad paramétert: $y = b,\ z = c$. Ekkor az egyenlet $x = b - c$: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$. Ebből tudjuk, hogy vektortér és, hogy bázisa: $(-1, 0, 1),\ (1, 1, 0)$.

4) d) Nem lesz vektortér, mert pl.: bármely W-beli vektor kétszere nem lesz benne a W-ben.
A leíró egyenlete: $a + b + c = 1$. Mátrixos alakban az egyenletek: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$ Ez lépcsős alakban van, ezért bevezethetünk két szabad paramétert: $y = b,\ z = c$. Ekkor az egyenlet $x = 1 - b - c$:

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ebből is láthatjuk, hogy nem lesz vektortér.

4) e) Például a $\underline{v} = (1,0,0) \in W$, de $2\underline{v} = (2,0,0) \notin V$.

4) f) Az altér leíró egyenlete: $a+b=0$. Mátrixos alakban az egyenletek: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ Ez lépcsős alakban van, ezért bevezethetünk két szabad paramétert: $y=b,\ z=c$. Ekkor az egyenlet $x=-b$: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$. A vektortér bázisa: $(-1,1,0),\ (0,0,1)$.

5. Adottak az $\underline{u} = (0,3,1,-1)$, $\underline{v} = (6,0,5,1)$ és $\underline{w} = (4,-7,1,3)$ vektorok. Adja meg az $S = span(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ lineáris teret kifeszítő vektorokat és a maradék vektort a független vektorok lineáris kombinációjaként.

   5) Nézzük-e, hogy lineárisan összefüggő-e a három vektor (3. feladatból tudjuk, hogy elég a vektorokból alkotott mátrix rangját vizsgálni.) $\begin{bmatrix} \underline{u} & \underline{v} & \underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tehát lineárisan összefüggők. Koordinátázzuk pl.: $\underline{w}$-t, akkor meg kell oldanunk a $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} = \underline{w}$ egyeneletet. Azaz: $\begin{bmatrix} \underline{u} & \underline{v} & | & \underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & | & 4 \\ 3 & 0 & | & -7 \\ 1 & 5 & | & 1 \\ -1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & | & 1 \\ 0 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -7/3 \\ 0 & 1 & | & 2/3 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$. Tehát: $\underline{w} = \begin{bmatrix} -7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}_{\{\underline{u},\underline{v}\}}$. Kifejezhettük volna $\underline{u}$-t vagy $\underline{v}$-t is, de ez volt a legkényelmesebb.
   De tudjuk, hogy $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineárisan független vektorok a $span(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$-ben, és $\underline{w}$-t kifejeztük $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineáris kombinációjából. Ezért a megadott vektortérben $\underline{u}$ és $\underline{v}$ bázist fog alkotni. (Minden vektort, amit ki tudok fejezni $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ lineáris kombinációjaként, $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineáris kombinációjaként is ki fogom tudni fejezni, úgy hogy a $\underline{w}$-t lecserélem $-7/3\underline{u} + 2/3\underline{v}$-re. Tehát minden vektortérbeli elemet ki tudok fejezni a lineáris kombinációjukként, és ők lineárisan függetlenek $\Rightarrow$ bázist alkotnak.) Így a $span(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ egy két dimenziós alteret alkot $\mathbb{R}^4$-ben. Tehát a már megadott bázishoz, tudok választani még két $\mathbb{R}^4$ vektort, amely 4 vektor lineárisan független. A választott két vektor lesz a kiegészítő vagy duális tér bázisa. Ehhez: $\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 12 & -21 & 3 & 9 \\ 0 & 217 & -7 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   (A $(12,-21,3,9)$ és $(0,21,7,-7)$ két lineárisan független vektor a $span(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ 2 dimenziós térből, ezért ők is bázisát fogják alkotni a térnek.) A Gauss elimináció lépései, ha a vektorokat soraiba fektetjük, megegyeznek a sorok, mint vektorok lineáris kombinációs lépéseivel. Láthatjuk, hogy $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ vektorokból nem fogjuk tudni előállítani a $(0,0,1,0)$-t és $(0,0,0,1)$-et sem, amik lineárisan függetlenek. Ezért ők alkotják a duális tér bázisát.

6. Mutassa meg, hogy lineárisan független vektorok halmazának bármely nem-üres részhalmaza lineárisan független vektorokól áll.

   6) Legyen $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineárisan független vektorok. Bizonyítsuk indirekten, azaz tegyük fel, hogy a v_i vektoroknak egy része lineárisan összefüggő. Ezek legyenek a $v_1, \dots, v_k$ vektorok, ahol $k < n$. (Úgy számoztuk meg őket, hogy előre kerüljenek.) Ha lineárisan összefüggőek, akkor létezik $\beta_1, \dots, \beta_k$ (nem mind 0), hogy $\sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i = 0$. Most válasszuk α-kat a következő módon: $\alpha_i = \beta_i$, ha $i \leqslant k$; és 0, ha $n \geqslant i > k$. Ekkor igaz lesz, hogy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, és nem minden $\alpha_i = 0$, hiszen volt olyan $\beta_i \neq 0$ $(i \leqslant k)$. Így ellentmondást kaptunk v_i lineáris függetlenségével. (Ha van valami, ami igaz egy nagy halmazon, akkor minden részhalmazán is igaz lesz.)

7. Igazoljuk, hogy lineárisan összefüggő vektorok halmazát bármely vektorokkal kibővítve lineárisan összefüggő vektorokat kapunk.

   (Az előzőhöz nagyon hasonlóan: ha valami nem igaz egy részhalmazon, akkor az egész halmazon sem fog teljesülni.)

8. Ha $\underline{u},\ \underline{v},\ \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges vektorok, akkor $\underline{u}-\underline{v},\ \underline{v}-\underline{w},\ \underline{w}-\underline{u}$ lineárisan összefüggő vektorok.

   8) Lineárisan összefüggő, ha a $\underline{0} = \alpha(\underline{u}-\underline{v}) + \beta(\underline{v}-\underline{w}) + \gamma(\underline{w}-\underline{u}) = (\alpha-\gamma)\underline{u} + (\beta-\alpha)\underline{v} + (\gamma-\beta)\underline{w}$ egyenletet meg tudjuk úgy oldani, hogy **1.** $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ nem mind nulla, és **2.** $\alpha-\gamma=0$, $\beta-\alpha=0$ és $\gamma-\beta=0$. Ez annak a következménye, hogy $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ vektorok lineárisan függetlenek.
   Írjuk fel mátrixos alakba az egyenletet: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. A kibővített mátrixot Gauss

elminálva: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$, amiből láthatjuk, hogy végtelen sok megoldása van. Azaz lineárisan összefüggők.
Egyszerűbben következik az eredmény, ha $U := \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ vektorokba koordinátázzuk az új vektorokat.
Így $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_U$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_U$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_U$ vektorok összefüggőségét kell vizsgálni ...

9. Adja meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásainak a halmazást, mint alteret (lineárisan független megoldások lineáris kombinációját).

a) $\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 6y & + & 2z & - & 5v & = 0 \\ -x & - & 6y & - & z & - & 3v & = 0 \\ 2x & + & 12y & + & 5z & - & 18v & = 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 2y & - & 2z & - & v & & & = 0 \\ 2x & + & 2y & - & 5z & + & v & - & 7w & = 0 \\ & & y & + & z & - & v & + & w & = 0 \\ -x & + & y & + & 5z & - & v & & & = 0 \end{array}$

9) a) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & | & 0 \\ -1 & 6 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 12 & 5 & -18 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & | & 0 \\ 0 & 12 & 1 & -8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & | & 0 \end{bmatrix}$ Be kell vezetnünk egy szabad paramétert: $u = d$. Ekkor $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} d$.

9) b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 & 7 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 5 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix}$

Be kell vezetnünk egy szabad paramétert: $w = e$. Ekkor $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} e$.

10. Adjuk meg az alábbi lineáris terek egy bázisát és dimenzióját.
a) $T = \{(a, b) \mid a + b = 0\}$
b) $U = \{(a, b, c, d) \mid a = 0, \; b + c = 0, \; d \in \mathbb{R}\}$
c) $V = \{(a, b, c) \mid a = 2b, \; b = 3c\}$
d) $W = \{(a, b, c) \mid a + 2b + c = 0\}$

10) a) Az altér leíró egyenlet: $x + y = 0$. Mátrixos alakban az egyenletek: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$ Ez lépcsős alakban van, ezért tudjuk egy szabad paramétert kell beveztnünk: $x = a$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} a$. Ebből tudjuk azt is, hogy vektortér és, hogy bázisa: $(1, -1)$. Ez azt jelenti, hogy a síkon az origón áthúzott $135°$-ot bezáró egyenes alteret alkot.

10) b) Az altér leíró egyenletei: $x = 0, \; y + z = 0$. Mátrixos alakban az egyenletek: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

Ez lépcsős alakban van $\Rightarrow$ 2 szabad paraméter: $y = b, \; zs = d$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ zs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$. Ebből tudjuk azt is, hogy vektortér és, hogy bázisa: $(0, 1, -1, 0)$ és $(0, 0, 0, 1)$.

10) c) Az altér leíró egyenletei: $x = 2y, \; y = 3z$. Mátrixos alakban az egyenletek: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix}$

Ez lépcsős alakban van $\Rightarrow$ 1 szabad paraméter: $z = c$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} c$. Ebből tudjuk azt is, hogy vektortér és, hogy bázisa: $(6, 3, 1)$.

10) d) Az altér leíró egyenletei: $x + 2y + z = 0$. Mátrixos alakban az egyenletek: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$

Ez lépcsős alakban van $\Rightarrow$ 2 szabad paraméter: $x = 0, \; z = c$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} c$. Ebből tudjuk azt is, hogy vektortér és, hogy bázisa: $(1, -1/2, 0)$ és $(0, -1/2, 1)$.