A2b 3. gyakorlat 2010/11/2

Tanult feladat típusok:

- Vektorok lineárisan összefüggősségének vizsgálata. ((**2. gy** 3.a)
- Egy vektor felírása a többi vektor lináris kombinációjaként, azaz mint bázisban koordinátázva.(**2. gy** 5.)
- Vektorok által kifeszített altér bázisa. Azaz a vektorok közül ki kell választanunk egy maximális lineárisan független vektorrendszert.(**2. gy** 5.)
- Egyenletrendszerrel megadott altér bázisának meghatározása. (**2. gy** 4., 10.)
- Kiegészítő altér meghatározása. (**2. gy** 5.)
- Egyenletrendszer megoldása (azon belül: rang számítás).

1. Határozzuk meg a következő mátrixok nullterét:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Döntsük el az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból, hogy lineárisan függetlenek-e. Ha nem, fejezzük ki az egyiket a többi lineáris kombinációjaként.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Vizsgáljuk az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorok összefüggőségét:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Adottak az $\underline{u} = (1,2,5,10)$, $\underline{v} = (1,2,6,12)$ és $\underline{w} = (2,4,7,14)$ vektorok. Adja meg az $S = span\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ lineáris teret kifeszítő vektorokat és a maradék vektort a független vektorok lineáris kombinációjaként.

5. Legyenek $\underline{u_1}, \underline{u_2}, \underline{u_3}, \underline{u_4} \in \mathbb{R}^8$ lineárisan függetlenek. Döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a) $\underline{u_1} - \underline{u_2}$, $\underline{u_2} - \underline{u_3}$, $\underline{u_3} - \underline{u_4}$ b) $\underline{u_1} - \underline{u_2}$, $\underline{u_2} - \underline{u_3}$, $\underline{u_3} - \underline{u_1}$

c) $\underline{u_1} + \underline{u_2}$, $\underline{u_2} + \underline{u_3}$, $\underline{u_3} + \underline{u_4}$, $\underline{u_4} + \underline{u_1}$ d) $\underline{u_1} + \underline{u_2}$, $\underline{u_2} + \underline{u_3}$, $\underline{u_3} + \underline{u_4}$, $\underline{u_4} + \underline{u_2}$

6. Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, amennyiben lehetséges:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

7. Legyenek

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \ \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \ \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \ \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Végezd el a következő műveleteket, ha ez lehetséges: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}$, $3\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{AB}}$, $\underline{\underline{AC}}$, $2\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{D}}^2$, $\underline{\underline{BC}}$, $\underline{\underline{CB}}$.

8. Legyenek adva az $\underline{\underline{A}}_{4\times5}$, $\underline{\underline{B}}_{5\times4}$, $\underline{\underline{C}}_{5\times2}$, $\underline{\underline{D}}_{4\times2}$, $\underline{\underline{F}}_{4\times5}$ mátrixok. Az alábbi kifejezések közül melyek vannak definiálva, és milyen a típusuk:

a) $\underline{\underline{AF}}$, b) $\underline{\underline{BD}} - \underline{\underline{C}}$, c) $\underline{\underline{ABF}} + \underline{\underline{DC}}^T$, d) $(\underline{\underline{B}}^T + \underline{\underline{A}})\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}}$.

9. Mutassuk meg, hogy ha $\underline{\underline{AB}}$ és $\underline{\underline{BA}}$ is értelmezve vannak, akkor $\underline{\underline{AB}}$ és $\underline{\underline{BA}}$ is négyzetesek.