Áttekintés:

- Két azonos alakú mátrixot össze lehet adni.
- Egy A n sorú, m oszlopú ($n \times m$-as) mátrixot össze lehet szorozni B $m \times k$-as mátrixszal balról. Azaz $A \cdot B$ létezik és $n \times k$-as.
- A mátrixszorzás a következőképpen néz ki:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{ik} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{i}b_{ik} \\ & \dots & & \\ \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{ik} \end{bmatrix}$$

Például. $\sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i1}$ pont az A mátrix első sorának és B mátrix első oszlopának a skalárszorzata.

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \dots \\ \underline{a}_n \end{bmatrix} \cdot [\, \underline{b}_1^T \quad \underline{b}_2^T \quad \dots \quad \underline{b}_k^T \,] = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \cdot \underline{b}_1 & \underline{a}_1 \cdot \underline{b}_2 & \dots & \underline{a}_1 \cdot \underline{b}_k \\ \underline{a}_2 \cdot \underline{b}_1 & \underline{a}_2 \cdot \underline{b}_2 & \dots & \underline{a}_2 \cdot \underline{b}_k \\ \dots & & & \\ \underline{a}_n \cdot \underline{b}_1 & \underline{a}_n \cdot \underline{b}_2 & \dots & \underline{a}_n \cdot \underline{b}_k \end{bmatrix}$$

- $[\, A \quad | \quad I \,] \sim [\, I \quad | \quad A^{-1} \,]$

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok 10. hatványát!

   $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Számítsuk ki következő blokkmátrixszorzatokat. Az I mindig a megfelelő méretű egységmátrixot, a 0 az odaillő alakú nullmátrixot jelöli.

   a) $\begin{bmatrix} -I & A \\ I & I \end{bmatrix}^2$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

   b) $\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$, ahol A és B $n \times n$-es mátrixok;

   c) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$, ahol A, C $n \times n$-es, B, D $m \times m$-es mátrixok.

3. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   a) Mik az XA márix oszlopai, ha X oszlopai $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$?

   b) Mik az AY mátrix sorai, ha Y sorai $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$?

4. Az $(1,3,2,0)$, $(2,1,-3,3)$, $(0,1,0,1) \in \mathbb{R}^4$ vektorok közül melyek elemei az $(1,1,1,1)$, $(0,1,2,-1)$, $(1,2,0,0)$ vektorok által kifeszített altérnek?

5. Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, és $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Oldjuk meg az $AX = B$ és a $BY = A$ mátrixegyenleteket!

6. Melyik mátrixok invertálhatók az alábbiak közül? Számítsuk ki ezek inverzét!

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

7. Adva van a $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,2,3), (1,1,2)\}$ bázis. Írjuk fel azt a mátrixot, mely megadja egy tetszőleges e bázisban felírt vektor standard $\mathcal{E}$ bázisbeli koordinátás alakját, majd írjuk fel azt a mátrixot is, mely mindenzt fordítva teszi, azaz keressük azt a C és D mátrixot, melyre

   $$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = C_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}, \qquad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = D_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$$

   fennáll tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorra. Írjuk fel az $(1,0,2)_{\mathcal{E}}$ és az $(1,2,0)_{\mathcal{B}}$ vektorok másik koordinátarendszerbeli alakját.