A2b 5-6. gyakorlat 2010/11/2

Elméleti összefoglaló: a teljesség igénye nélkül

- Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix **LU felbontás**a alatt azt az $\underline{\underline{L}}$ alsó és $\underline{\underline{U}}$ felső háromszög mátrixot értjük, melyre $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{LU}}$. Meghatározásához Gauss eliminációt használunk (sorcsere nélkül), a Gauss eliminációs lépéseket felírjuk elemi mátrixokkal való szorzásként. Ezeknek az elemi mátrixok inverzének a szorzata lesz az $\underline{\underline{L}}$ mátrix. Nem minden mátrixnak van LU felbontása, ha az $\underline{\underline{L}}$ diagonálisában csak egyesek szerepelnek (nem osztottuk el egyik sort sem egy konstanssal), akkor a felbontás egyértelmű.

- Egyenletrendszer megoldására (vagy speciálisan a mátrix inverzének keresésére is) használhatjuk: $\underline{\underline{LU}}\underline{x} = \underline{b}$ egyenlet helyett: $\underline{\underline{L}}\underline{y} = \underline{b}$ majd a $\underline{\underline{U}}\underline{x} = \underline{y}$ egyenleteket oldjuk meg behelyettesítéssel.

- **Determináns számolása Gauss eliminálással:** egy négyzetes mátrixot Gauss eliminálunk (sorcsere nélkül VAGY jelöljük, hogy két egymás melletti sorcseréje -1-szeresére változtatja a determinánst), majd a diagonálisban lévő elemek szorzataként megkapjuk a determinánst (és az esetleges -1-sekkel).

- **Kifejtési tétel:**A determináns számolás esetén egy $n \times n$-es mátrix determinánsát felírjuk $n-1$ db $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsok lineáris kombinációjaként. Kifetjhetjük a mátrix bármely sora vagy oszlopa szerint. Például 4×4-esre a második sor szerint:

$$|\underline{\underline{A}}| = \left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right| = \text{-}a_{21} \cdot \left|\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right| + a_{22} \cdot \left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right| \text{-}$$

$$\text{-}a_{23} \cdot \left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}\right| + a_{24} \cdot \left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}\right|$$

  Célszerű aszerint a sor vagy oszlop szerint végezni a kifejtést, amelyben a legtöbb nulla van, mert akkor kevesebb $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixokar kell kiszámítani, tovább fejteni. Ha A_{ij}-vel jelöljük annak a mátrixnak a determinánsát, amelyet úgy kapunk, hogy elhagyjuk az eredetiből i.-ik sort és j.-ik oszlopot, akkor a kifejtési tétel oszlop szeint a következőképpen néz ki (a j. oszlop, majd a i. sor szerint):

$$det(A) = \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n+j} a_{nj} A_{nj} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{i+m} a_{im} A_{im}$$

  A mátrix i. sorában és j. oszlopában az előjel: $(-1)^{i+j}$, ez pont sakktáblaként szinezi meg a mátrixot.

- **Mátrix inverze**: az előző $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix jelölésével

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\begin{bmatrix} +A_{11} & -A_{12} & +A_{13} & \dots & \pm A_{1n} \\ -A_{21} & +A_{12} & -A_{13} & \dots & \mp A_{1n} \\ +A_{31} & -A_{32} & +A_{33} & \dots & \pm A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm A_{n1} & \mp A_{13} & \pm A_{13} & \dots & +A_{1n} \end{bmatrix}^T}{det(A)} = \frac{adj(\underline{\underline{A}})}{det(A)}$$

  A számlálóban lévő mátrixot nevezzük a mátrix adjungált mátrixának. Jelölése: $adj(\underline{\underline{A}})$.

- $(\underline{\underline{AB}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$ és $(\underline{\underline{AB}})^T = \underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}^T$

- Lineáris egyenletrendszer megoldása **Cramer szabály**-lyal: $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$ megoldása: $x_i = \frac{D_i}{det(A)}$, ahol D_i annak a mátrixnak a determinánsa, melyet úgy kapunk, hogy $\underline{\underline{A}}$ mátrixban kicseréljük az i.-ik oszlopot $\underline{b}$ vektorra.

- **Determináns szorzászabálya**: $det(AB) = det(A)det(B)$

1. Számítsuk ki a következő mátrixok LU-felbontását. Az LU mátrix felbontás segítségével képezzük a mátrixok inverzét

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

2. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát.

   a) $\left|\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}\right|$ b) $\left|\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right|$ c) $\left|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}\right|$ d) $\left|\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right|$

   e) $\left|\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\right|$ f) $\left|\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right|$ g) $\left|\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right|$ h) $\left|\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right|$

3. Mely k esetén lesz invertálhatóak az alábbi mátrixok?

   a) $\begin{bmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ k^2 & k^2 & k^2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 3 & 4 & k-4 \end{bmatrix}$

4. Mely a érték esetén létezik a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$ mátrixnak inverze?

5. Mely $\underline{b}$ érték esetén lesz a $\begin{bmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.

6. Határozzuk meg a következő mátrixok adjungáltját és inverzét.

   a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

7. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket a Cramer-szabállyal.

   a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$

8. A determináns szorzás szabályával számítsuk ki a következőket, ha tudjuk, hogy $det(A) = 3$

   a) $det(A^{-1})$ b) $det(2A)$ c) $det(A^T)$ d) $det(2A^T)$

9. Számoljuk ki a determinánsokat, ha tudjuk, hogy $det(A) = 3$ és $det(B) = 2$.

   a) $det(A^{-1}BA)$ b) $det((AB)^{-1})$ c) $det(AB^{-1})$ d) $det(A^{-2}B^T)$