A2b 7. gyakorlat 2010/11/2

Tudnivalók

- V-t ($\mathbb{R}$)-vektortérnek nevezzük, ha minden $v_1, v_2, v \in V$ és $\lambda(\in \mathbb{R})$-re teljesül, hogy: 1. $v_1 + v_2 \in V$ és $\lambda v \in V$
- Egy vektortérnek van bázisa, ami vektoroknak egy halmaza. Egy vektortérnek ∞ bázisa van. De mindegyik bázisnak ugyanannyi az elemszáma.
- Egy vektortérnek $\mathfrak{B}$ vektorok halmaza bázisa, (a következő feltételek ekvivelensek, azaz elég az egyiket ellenőrizni, és akkor tudjuk, hogy a többi is teljesül)
  - ha nem tudok hozzá V vektortérből lineárisan független vektort választani. (maximális lineárisan független halmaz);
  - ha minden V vektorbeli elemet elő tudom állítani $\mathfrak{B}$ vektorok lineáris kombinációjaként, és a $\mathfrak{B}$ vektorok lineárisan függetlenek (lineárisan független generátorrendszer);
  - ha minden V vektorbeli elemet elő tudom állítani $\mathfrak{B}$ vektorok lineáris kombinációjaként, de $\mathfrak{B}$-ből nem hagyhatok el vektort, úgy hogy továbbra is mindent elő tudjak állítani (minimális generátorrendszer).
- $T : V_1 \to V_2$ ($\mathbb{R}-$)két vektortér közötti leképezést lineáris leképezésnek nevezzünk, ha teljesül a következő két feltétel minden $v_1, v_2, v \in V_1$ és $\lambda(\in \mathbb{R})$: $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ és $T(\lambda v) = \lambda T(v)$.
- Egy lineárid transzformációt elég megadni a vektortér bázisán.
- Minden lineáris leképezésnek rögzített V_1 és V_2-beli bázisban egyértelműen megfeleltethetünk egy $dim(V_1) \times dim(V_2)$-es mátrixot és vissza. Fontos, hogy a mátrix az bázis függő.

1. Lineáris transzformációk-e az alábbi leképezések?
   a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x - 3y \end{bmatrix}$ c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y + 1 \\ x - 3y - 1 \end{bmatrix}$

2. Adja meg a lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban.
   a) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; b) $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$;
   c) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Adja meg az adott lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban!
   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az $y = x$ egyenesre való tükrözés.
   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az $y = \sqrt{3}x$ egyenesre való merőleges vetítés.
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az $y = z$ síkra való tükrözés.
   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az $y = 0$ síkra való merőleges vetítés.
   e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ az $y = 0$ síkra való merőleges vetítés.
   f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a z-tengely körüli $\pi/6$-tal való forgatás.
   g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az y-tengely körüli $\pi/6$-tal való forgatás.
   h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \underline{x} \to (\underline{a}\underline{b}^T)\underline{x} = \underline{a}(\underline{b}\underline{x})$, ahol $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \underline{x} \to \underline{a} \times \underline{x}$, ahol $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   j) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az origó körüli α szöggel való forgatás (előadáson volt).
   k) [(k*)] $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre való tükrözés.
   l) [(l*)] $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az x-tengellyel α szöget bezáró egyenesre való merőleges vetítés.

4. Adja meg a T lineáris transyformáció mátrixát a megadott bázisban!
   a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x - 2y \\ 6x - 3y \end{bmatrix}$, $\mathfrak{B} = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ y \\ y - z \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.