A2b 8-9. gyakorlat 2010/11/2

Tudnivalók

- $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrixnak sajátértéke λ, ha létezik olyan $\underline{v} \neq \underline{0}$, melyre $\underline{\underline{A}}\underline{v} = \lambda\underline{v}$.
- $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeinek a meghatározása: keressük a gyökeit a $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}})$ polinomnak (λ a változó).
- A sajátvektorokat minden egyes sajátértékhez külön kell megkereseni.

1. Igazoljuk, hogy egy mátrix egy sajátértékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak.

2. Adjuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

   a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   Megoldás

   a) $8 : \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} r,\ -1 : \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} s;$ b) $0 : \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} r,\ 5 : \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} s,\ -2 : \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} t;$

   c) $0 : \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} r,\ 3 : \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} s,\ -3 : \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} t;$ d) $1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s,\ -1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t.$

3. Legyen az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix. Adjuk meg a értékét úgy, hogy $\lambda = 1$ sajátértéke legyen a mátrixnak. Határozzuk meg a többi sajátértéket és a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorait.
   Megoldás c) $a = 2$

4. Igazoljuk, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak sajátértéke λ és $\underline{u}$ egy hozzá tartozó sajátvektora, akkor az $\underline{\underline{A}}^2$ mátrixnak sajátértéke λ^2 és $\underline{u}$ egy ehhez tartozó sajátvektor.
   Megoldás $\underline{\underline{A}}\underline{u} = \lambda\underline{u} \ \Rightarrow\ \underline{\underline{A}}^2\underline{u} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{A}}\underline{u}) = \underline{\underline{A}}\lambda\underline{u} = \lambda\underline{\underline{A}}\underline{u} = \lambda\lambda\underline{u} = \lambda^2\underline{u}$

5. Igazoljuk, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ invertálható mátrix, akkor $\underline{\underline{A}}^{-1}$ sajátértékei pont az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeinek a reciproka, és sajátvektoraik megegyeznek.
   Megoldás $\underline{\underline{A}}\underline{u} = \lambda\underline{u} \ \Rightarrow\ \underline{u} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{u} = \underline{\underline{A}}^{-1}\lambda\underline{u} = \lambda\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{u} \ \Rightarrow\ \frac{1}{\lambda}\underline{u} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{u}$ Oszthattam λ-val, mert $\lambda \neq 0$. (A mátrix determinánsa nem 0, mert invertálható. A determináns pedig a sajátértékek szorzata. Ha 0 sajátértéke lenne, akkor a mátrix determinánsa 0 lenne, ez pedig ellentmond, annak hogy invertálható.)

6. Határozzuk meg gyakorló feladatokból a 7. a) és a 8. feladat (g)-t és h)-t nem kell) lineáris transzformációinak a sajátértékeit és sajátvektorait. Írjuk fel a sajátvektorok által alkotott bázisban a leképezések mátrixát!
   Gyakorló feladatok

7. Adja meg a lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban.

   a) $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix};$ b) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

   c) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix};$ d) $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

   Megoldás

   a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   6. Megoldás

   a) $1 : \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ -1 : \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ \mathfrak{B} = \{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\},\ \mathfrak{A}_{ST \leftarrow \mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\ \mathfrak{A}_{\mathfrak{B} \leftarrow ST} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$

   $T_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

8. Adja meg az adott lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban!
   a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ az $y=\sqrt{3}x$ egyenesre való tükrözés.
   b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ az $x+y+z=0$ síkra való tükrözés.
   c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ az y-tengellyel α szöget bezáró egyenesre való tükrözés.
   d) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ az $y=x$ egyenesre való merőleges vetítés.
   e) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ az y-tengellyel α szöget bezáró egyenesre való merőleges vetítés.
   f) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ az $x+y+z=0$ síkra való merőleges vetítés.
   g) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:\underline{x}\to\underline{a}\times\underline{x}$, ahol $\underline{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.
   h) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:\underline{x}\to(\underline{a}\underline{b}^T)\underline{x}=\underline{a}(\underline{b}\underline{x})$, ahol $\underline{a}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$, $\underline{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

Megoldás

a) $\begin{bmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}-\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha)\\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha)\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}\sin^2(\alpha) & \frac{\sin(2\alpha)}{2}\\ \frac{\sin(2\alpha)}{2} & \cos^2(\alpha)\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix}3 & 6 & 9\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

6. Megoldás Határozzuk meg a sajátértékeket és a sajátvektorokat. Írjuk fel a leképezés mátrixát a sajátéértékek alkotta bázisban:

a) $1:\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}r,\ -1:\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ -1\end{bmatrix}s,\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix};$ b) $1:\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}r+\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}s,\ -1:\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}t,\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix};$

c) $1:\begin{bmatrix}\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{bmatrix}r,\ -1:\begin{bmatrix}-\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{bmatrix}s,\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix};$ d) $1:\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}r,\ 0:\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}s,\ \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};$

e) $1:\begin{bmatrix}\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{bmatrix}r,\ -\begin{bmatrix}-\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{bmatrix}s,\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$ f) $1:\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}r+\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}s,\ 0:\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}t,\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix};$

9. Adja meg a T lineáris transzformáció mátrixát a megadott bázisban! Írjuk fel a sajátértékeket és sajátvektorokat a standard bázisban!
   a) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x-4y\\2x+5y\end{bmatrix}$, $\mathfrak{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$ b) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x-y-z\\y-2z\\-z\end{bmatrix}$, $\mathfrak{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Megoldás

a) $\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}};\ 1:\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}r=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}r_{\mathfrak{B}},\ 3:\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}s=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}s;$ b) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}},\ 2:\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}r\ 1:\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}s,\ -1:\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}t,$

10. Milyen geometriai leképezést ír le az a 3×3-as mátrix, melynek sajátértéke:
    a) $1,1,1$ b) $1,1,0$ c) $1,1,-1$ d) $1,-1,-1$
    e) $2,1,1$ f) $2,0,1$ g) $1,0,0$ h) $-1,-1,-1$

Megoldás

a) Mindent helyben hagy.

b) Ferdén vetít az első kettő sajátvektor által meghatározott síkra, a 3. sajátvektor irányából.

c) Ferdén tükröz az első kettő sajátvektor által meghatározott síkra, a 3. sajátvektor irányából.

d) Ferdén tükröz az első sajátvektor által meghatározott egyenesre, a két utolsó sajátvektor által meghatározot irányból.

e) Az első sajátvektor irányában kétszeresre nyújtja a vektort.

f) Ferdén vetít az első és harmadik sajátvektor által meghatározott síkra a második sajátvektor irányából, majd az első sajátvektor irányában kétszeresre nyújtja a vektort.

g) Az első sajátvektorra ferdén vetít.

h) Az origóra tükröz.

A ferde tükrözések, vetítések merőlegesek, ha a sajátértékek merőlegesek egymásra!