

1. Végezzük el az alábbi számításokat!

(7 pont)

a) Határozzuk meg az alábbi mátrix alapvető altereinek dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) &= \dots & \dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) &= \dots \\ \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) &= \dots & \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)) &= \dots \end{aligned}$$

b) Tegyük fel, hogy a 4×4 -es $\mathbf{A}$ mátrixra $\det(\mathbf{A}) = 2$.
Ekkor $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dots$ $\det(3\mathbf{A}) = \dots$

c) Számítsuk ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \dots$$

d) Ha az $\mathbf{A}$ egy $m \times n$ -es mátrix, és sorterének dimenziója r ,
akkor az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerben a szabad változók
száma $= \dots$, a nulltér dimenziója $= \dots$

e) Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrix előjeles A_{32} aldeterminánsát
(kiszámítani nem kell, csak felírni):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & c \\ c & d & c & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \quad A_{32} =$$

2. Az alábbiak közül melyik állítás igaz? (I/H, pontozás
jó válasz $= +1$, rossz válasz $= -1$ pont, de az összpont-
szám nem lehet negatív) (8 pont)

Ha egy n -ismeretlenes egyenletrendszer nem oldható meg,
akkor az egyenletek olyan hipersíkok egyenletei, melyek
közt van két párhuzamos, de nem azonos hipersík. ☐

Ha egy n -ismeretlenes egyenletrendszer csak két egyen-
letből áll, akkor az oszlopmodell szerint pontosan akkor
oldható meg tetszőleges jobb oldal esetén, ha a vektor-
egyenlet bal oldalán szereplő vektorok közt van kettő
lineárisan független. ☐

Minden homogén lin. egyenletrendszer megoldható. ☐

Ha egy 9-ismeretlenes egyenletrendszer csak 6 egyenletből
áll, akkor végtelen sok megoldása van. ☐

Alterek uniója alter. ☐

Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret
alkotnak. ☐

Rögzített $\mathbf{A}$ mátrix mellett azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az
 $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer megoldható, alteret alkotnak. ☐

Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely két meg-
oldásának különbsége megoldása a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$
egyenletrendszernek. ☐

3. Válasszunk ki a $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 2, 4)$, $\mathbf{v}_3 =$
 $(0, 1, 3, 2)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 4, 4)$ és $\mathbf{v}_5 = (2, 3, -1, 2)$ vektorok
közül maximális számú lineárisan függetlent és állítsuk elő
a többi ezek lineáris kombinációjaként. (5 pont)

4. a) Határozzuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg e felbontást fölhasználva, (elemi sorműveletek,
mátrixinvertálás, Cramer-szabály használata nélkül!) az

$$\begin{aligned} x &+ z &= 1 \\ -x + 2y - 2z &= -1 \\ 4y - z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

(2+3 pont)

5. Milyen a és b értékekre lesz 0, 1, illetve végtelen sok megoldása az alábbi bővített mátrixú egyenletrendszernek? Adjuk is meg a megoldást abban az esetben, ha végtelen sok megoldás van!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & a & b & 2 \\ 0 & 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right]$$

(5 pont)

8. Írjuk fel a standard $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bázisról a $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 4)\}$ valamint a $\mathcal{B}$ -ről az $\mathcal{E}$ -re való át-térés mátrixát, és írjuk fel az $(1, -2, 3)$ vektor $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakját!

(5 pont)

6. Oldjuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet ahol (5 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Határozzuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer sor-térbe eső egyetlen megoldását, majd írjuk fel ezt fölhasználva az összes megoldást!

(5 pont)

$$x + 2y + z = 5$$

$$2x + 3y + 3z = 11$$

$$x + y + 2z = 6$$

7. Határozzuk meg az első ismeretlen értékét az $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{array} \right]$ mátrixú egyenletrendszerben a Cramer-szabállyal, és együtthatómátrixának inverzében a második sor harmadik elemét megfelelő aldeterminánsok segítségével!

(5 pont)