**Feltételes eloszlás**

Ha $X$ val. változó folytonos, $f(x)$ sfv-nyel és $X$ és $Y$ val. változók együttes sfv-e $h(x,y)$, akkor az $Y$ feltételes sfv-e $X$ szerint: $k(y|x) = \frac{h(x,y)}{f(x)}$.

1. Dobókockát hatszor feldobunk. Jelentse $X$ a dobott párosok, Y a dobott 6-osok számát. Határozza meg $X$-nek $Y$-ra vonatkozó lehetséges feltételes eloszlásait.

2. Az, hogy egy almafán hány virág van, geometriai eloszlású valószínűségi változó, $\frac{1}{5}$ paraméterrel. Minden virágból $\frac{2}{3}$ valószínűséggel lesz alma. Mi a valószínűsége, hogy 30 alma lesza fán?

3. Legyen $f(x,y) = \frac{1}{x}$, ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:
   a) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.5) =?$ b) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.8) =?$ c) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = x) =?$
   d) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = 0.1) =?$ e) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = 0.4) =?$ f) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = y) =?$

**Többdimenziós eloszlások várható értéke, kovarincia mx-a**

A várhatóérték egy vektor, melynek az i. koordinátája az i. val. változó várható értéke.
$X$ és $Y$ val. változó kovarienciája: $Cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y)(= M((X - M(X))(Y - M(Y))))$.
Tehát $Cov(X,X) = D^2(X)$. Ebből mátrixot képezve kapjuk a kovariancia mátrixot.

4. Számítsd ki a 10. gyakorlat 3. feladatában megadott $X, Y$ valószínűségi változókból képzett $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ többdimenziós eloszlás várható értékét és kovarianciáját.

5. Számítsd ki a 10. gyakorlat 4. c) és 5. feladatában megadott $X, Y$ valószínűségi változókból képzett többdimenziós eloszlás várható értékét és kovarianciáját.

**Folytonos valószínűségi változók transzformációi**

Legyen Y = t(X). Ha a $t$ függvény monoton, és $t^{-1}$ folytonosan differenciálható, akkor

$$G(y) = F(t^{-1}(y)) \ (t \text{ m. nő}) \text{ vagy } G(y) = 1 - F(t^{-1}(y)) \ (t \text{ m. csökk.}), \qquad g(y) = f(t^{-1}(y))|[t^{-1}(y)]'|.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int t(x)f(x)dx, \qquad \mathbb{D}^2(Y) = \int t(x)^2 f(x)dx - \mathbb{E}(Y)^2$$

6. Vegyük azt az X folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ ha $x \in [0,1]$, egyébként 0. Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Vizsgáljuk a várható értéket!

7. Van egy 25 óra várható értékű exponenciális eloszlás szerint kiégő égőnk. A barátommal a következő játékot játszuk: fizetek neki $25^2 = 625$ forintot, és ha kiég az égő, akkor ő kifizeti nekem az égő órákban mért élettartalmának négyzetét. Kinek előnyös a játék? Számoljuk ki a barátom által fizetett pénz eloszlását!

8. Legyen $X$ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Határozzuk meg $x^{1/2}, x^2, x^{-1/2}, x^{-1}$, $x^{-2}$eloszlását. Hogyan változik a várható érték és szórás?

9. Egy villanykörte-gyár $\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlás szerint kiégő villanykörtét gyárt. Hosszú kutatás után bevezetnek egy új (lineáris) eljárást, amely segítségével megháromszorozták az izzók élettartalmát. Milyen lett így az új izzók élettartalmának eloszlása?

10. Legyen X 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi lesz $X^k$ eloszlása? Mi lesz az új várható érték, és az új szórás?

11. Legyen X egyenletes eloszlású az $[5,8]$ intervallumon. Számoljuk ki
    a) $|X - 6|$ b) $X^2$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

12. Legyen $X$ egy 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $Y = \ln(X)$ sűrűségfüggvényét.

13. Legyen $X$ egyenletes eloszlású az $(\alpha, \beta)$ intervallumon. Mi lesz $Z = aX + b$ eloszlása?

14. Legyen $X$ normális eloszlású $\mu$ várható értékkel és $\sigma$ szórással. Mi lesz $Z := aX + b$ eloszlása? (Tipp: határozzuk meg és csodálkozzunk rá $Z$ nevezetes sűrűségfüggvényére.)

15. A $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ csúcsú háromszögen vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!

16. Legyen $(X, Y)$ eloszlás egyenletes az egységnégyzeten. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

17. Vegyünk egy két dimenziós $(X, Y)$ eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

18. Legyenek $X$ és $Y$ független exponenciális eloszlású változók $\lambda$ és $\mu$ paraméterekkel. Határozzuk meg $V = Y/X$ eloszlását, és számítsuk ki a $P(X < Y)$ valószínűséget.

19. $(X, Y)$ kétdimenziós eloszlás sűrűségfüggvénye legyen a következo: $f(x, y) = \frac{xy}{64}$, ha $0 \leq x \leq 4$ és $0 \leq y \leq 4$, 0 egyébként

    a) Adjuk meg X eloszlását!
    b) Tudjuk, hogy $X = 3$, adjuk meg Y eloszlását!
    c) Mi lesz $X + Y$ eloszlása?
    d) Mi lesz $X \cdot Y$ eloszlása?

    e) Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy 3 helyére egy változót írunk, azaz: tudjuk, hogy $X = x$, ahol $0 \leq x \leq 4$, adjuk meg $Y$ eloszlását!

**Konvolúció**

Ha $X$ és $Y$ diszkrét valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ eloszlását könnyedén ki tudjuk számolni.

$$P(X + Y = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k, Y = l - k).$$

Ha függetlenek is, akkor

$$P(X + Y = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k)P(Y = l - k).$$

Például ha $X$ és $Y$ két szabályos dobókockával dobott értéket jelöl, akkor a képlet szerint: P (dobások összege = 8) = P (X = 2)P (Y = 6) + P (X = 3)P (Y = 5) + P (X = 4)P (Y = 4) + P (X = 5)P (Y = 3) + P (X = 6)P (Y = 2)

Folytonos esetben is hasonló képletet kapunk. Ha $X$ és $Y$ függetlenek, továbbá $X$ sűrűségfüggvénye $f(x)$, $Y$ sűrűségfüggvénye $g(y)$, akkor $Z = X + Y$ sűrűségfüggvényét $h(z)$-vel jelölve:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx$$

20. A számológépemmel generálok két véletlen számot $[0, 1]$-en (egyenletesen), és összeadom oket. Írjuk fel az összeg eloszlásának sűrűségfüggvényét!

21. Számoljuk ki egy $[0, 2]$-n és egy $[0, 3]$-an egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét.

22. Számítsuk ki két darab független 1 paraméterű Poisson eloszlás összegének eloszlását!

23. A binomiális eloszlás értelmezése alapján mutassuk meg, hogy egy binomiális $(n, p)$ és egy tőle független binomiális $(m, p)$ valószínűségi változó összege szintén binomiális, $n + m$ és $p$ paraméterekkel.

24. Számoljuk ki egy $\lambda_1$ és egy $\lambda_2$ paraméterű exponenciális eloszlás összegének és különbségének eloszlását!

25. Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!