Feltételes eloszlás

1. $X \sim Bin(6,1/2)$ a dobott párosok száma, $Y|_{X=x} \sim Bin(x,1/3)$ a dobott párosok közül a 6-osok száma.
$P(X=i|Y=j) = \begin{cases} \frac{\binom{6}{i}\binom{i}{j}\frac{1}{2^{6-i}}\frac{1}{3^{i-j}}\frac{1}{6^j}}{\binom{6}{j}(\frac{5}{6})^{6-j}\frac{1}{6^j}} & \text{ha } i \geq j; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

2. $X \sim G(1/5)$ a virágok száma, $Y|_{X=x} \sim Bin(x,2/3)$ az almák száma az X virágból.
$P(Y=30) = \sum_{i=30}^{\infty} P(Y=30|X=i)P(X=i) = \sum_{i=30}^{\infty} \binom{x}{30}(\frac{2}{3})^{30}\frac{1}{3^{i-30}}\frac{1}{5}(\frac{4}{5})^{i-1}$

3. Számoljuk ki a peremeloszlásokat: X valószínűségi változónak $f(x)=1$, ha $x \in (0,1)$; Y valószínűségi változónak $g(y) = -\ln(y)$, ha $y \in (0,1)$. Így a feltételes eloszlások: $X|_{Y=y}$ $l(x|y) = -\frac{1}{x\ln(y)}$ $(y < x < 1)$ és $Y|_{X=x}$ $k(y|x) = \frac{1}{x}$ $(0 < y < x)$.

   a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{0.1}{x}$, ha $0.4 < x$
   d) $-\frac{\ln(0.7)-\ln(0.5)}{\ln(0.1)}$ e) $-\frac{\ln(0.7)-\ln(0.5)}{\ln(0.4)}$ f) $-\frac{\ln(0.7)-\ln(0.5)}{\ln(y)}$, ha $y < 0,5$

Többdimenziós eloszlások várható értéke, kovariencia mx-a

4. A peremloszlások: $\begin{array}{cccc} X & 1 & 2 & 3 \\ & 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{array}$ $\begin{array}{cccc} X & 1 & 2 & 3 \\ & 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{array}$. Ebből $E(X) = 1.7$, $E(Y) = 2$, $E(XY) = 3.3$, $E(X^2) = 3.5$, $E(Y^2) = 4.6$. Így a várható érték: $\begin{pmatrix} 1.7 \\ 2 \end{pmatrix}$, a kovariancia mx: $\begin{pmatrix} 3.5 - 1.7^2 & 3.3 - 3.4 \\ -0.1 & 4.6 - 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{8} & \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}$

Valószínűségi változók transzformációi

6. $t(x) = 3x+5$ szigorúan mondoton függvény, és $t^{-1}(y) = \frac{y-3}{5}$ ($\Leftarrow$ $t(x) = 3x+5 = y$-ból kifejezve) Sűrűségfüggvénye:
$$g(y) = \begin{cases} (\frac{y-3}{5})' \cdot 2\frac{y-3}{5} = \frac{2y-6}{5} & \text{ha } \frac{y-3}{5} \in [0,1] \;\Leftrightarrow\; y \in [3,8], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

7. X: kiégés ideje, $\mathbb{E}(X) = 25 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{25}$, $X \sim Exp(\frac{1}{25}$
Y: nyeremény értéke, $Y = X^2 - 625$, $t(x) = x^2 - 625$ szig. monoton $[0,\infty)$-en.
$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty (x^2-625)f(x)dx = \int_0^\infty x^2 f(x)dx - \int_0^\infty 625 f(x)dx$ parciálisan integrálható, vagy: $\int_0^\infty x^2 f(x)dx = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + E(X)^2 = 625 + 625$ és $\int_0^\infty 625 f(x)dx = 625\int_0^\infty f(x)dx = 625$, ezért $\mathbb{E}(Y) = 625$.

8. $A = X^{1/2}$, $t(x) = x^{1/2}$, $\mathbb{E}(A) = \int_0^1 x^{1/2}dx = \frac{2}{3}$, $\mathbb{D}^2(A) = \int_0^1 xdx - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$
$B = X^2$, $t(x) = x^2$, $\mathbb{E}(B) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, $\mathbb{D}^2(B) = \int_0^1 x^4 dx - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$
$C = X^{-1/2}$, $t(x) = x^{-1/2}$, $\mathbb{E}(C) = \int_0^1 x^{-1/2}dx = 2$, $\mathbb{D}^2(C) = \int_0^1 x^{-1}dx - 4$ nem véges
$D = X^{-1}$, $t(x) = x^{-1}$, $\mathbb{E}(D) = \int_0^1 x^{-1}dx$ nem véges, $\mathbb{D}^2(D) = \int_0^1 x^{-2}dx - (\int_0^1 x^{-1}dx)^2$ sem véges
$E = X^{-2}$, $t(x) = x^{-2}$, $\mathbb{E}(E) = \int_0^1 x^{-2}dx$ nem véges, $\mathbb{D}^2(E) = \int_0^1 x^{-4}dx - (\int_0^1 x^{-2}dx)^2$ sem véges

9. X: villanykörte kiégési ideje $\sim Exp(\lambda)$. $t(x) = ax+b$ meg kell határoznunk a-t, b-t
$Y = aX + b$ és $E(Y) = \frac{3}{\lambda}$:
$\frac{3}{\lambda} = \int_0^\infty (ax+b)f(x)dx = a\int_0^\infty (xf(x)dx + b\int_0^\infty f(x)dx = a\mathbb{E}(X) + b$. Tehát $a = 3$ és $b = 0$.

10. $X \sim Exp(2)$, $t(x) = x^k \;\Rightarrow\; t^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$, $t(x)$ szig. mon. $[0,\infty)$-en
$$g(y) = \begin{cases} \lambda^{-\lambda\sqrt[k]{y}\frac{1}{k}y^{1/k-1}} & \text{ha } \sqrt[k]{y} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; y \geq 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
$\mathbb{E}(Y) = \lambda\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx$, indukcióval és parc. int. bizonyítható, hogy $\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}$, így $\mathbb{E}(Y) = \frac{k!}{\lambda^k}$, $\mathbb{D}^2(Y) = \lambda\int_0^\infty x^{2k}e^{-\lambda x}dx - \frac{k!^2}{\lambda^{2k}} = \frac{(2k)!}{\lambda^{2k}} - \frac{k!^2}{\lambda^{2k}}$ újra használva az állítást $k = 2k$-ra

11. a)t(x) nem monoton. Számoljuk először az eloszlás függvényt:

$$G(y) = \begin{cases} \frac{2y}{3} & \text{ha } y \in [0,1] \;\Leftrightarrow x \in [6-y, 6+y], \\ \frac{y+1}{3} & \text{ha } y \in [1,2] \;\Leftrightarrow x \in [5, 6+y], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Lederiválva megkapjuk a sűrűségfüggvényét:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{ha } y \in [0,1] \;\Leftrightarrow x \in [6-y, 6+y], \\ \frac{1}{3} & \text{ha } y \in [1,2] \;\Leftrightarrow x \in [5, 6+y], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b) $t(x) = x^2$ szig. mon. $[5,8]$-on, $t^{-1}(y) = \sqrt{y}$ így:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{y}} & \text{ha } y \in [25,64] \;\Leftrightarrow x \in [5,8], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} \int_{25}^{y} \frac{1}{6\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}-5}{3} & \text{ha } y \in [25,64] \;\Leftrightarrow x \in [5,8], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

12. $X \sim Exp(1)$, $t(x) = \ln(x)$ szig. mon. $t^{-1}(y) = e^y$

$$g(y) = \begin{cases} e^{-1e^y} e^y & \text{ha } x \geq 0 \;\Leftrightarrow y \in \mathbb{R}, \\ - & . \end{cases}$$

13. $X \sim Egyenletes(\alpha, \beta)$, $t(x) = ax + b$ szig. mon. $\Rightarrow$ $t^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} \frac{1}{|a|} & \text{ha } x \geq [\alpha, \beta] \;\Leftrightarrow y \in [a\alpha + b, a\beta + b], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha a negatív akkor y intervallumának két határa felcserélődik.

14. $X \sim N(\mu, \sigma)$ és $t(x) = ax + b$ szig. mon. $\Rightarrow$ $t^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$ $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\frac{y-b}{a}-\mu}{2\sigma^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot a} e^{-\frac{y-b-a\mu}{2(\sigma \cdot a)^2}} \Rightarrow$ ez a sfv-e $N(b + a\mu, \sigma$-nak. Tehát X ilyen eloszlású.

15. Írjuk fel az együttes sűrűségfüggvényt: $h(x,y) = 2$, ha $0 < y < x < 1$. Z valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$P(Z < z) = P(Y/X < z) = P(Y < Xz) = \int_0^1 \int_0^{\min\{xz, x\}} 2dydx$$

Mivel az $Y < X$, a Z értékek csak 0 és 1 értékeket vehet fel. (A többi értéket 0 valséggel veszi fel.) Így $P(Z \leq z) = \int_0^1 \int_0^{xz} 2dydx = z$, ha $z \in (0,1)$.

16. $F(u) = P(U < u) = P(X < \frac{u}{Y}) = \int_0^1 \int_0^{\min\{u/y, 1\}} 1dxdy = \int_0^u \int_0^1 1dxdy + \int_u^1 \int_0^{u/y} 1dxdy = u - u\ln(u)$, ha $u \in (0,1)$ az eloszlás függvény.
$f(u) = -\ln(u)$, ha $u \in (0,1)$ a sűrűség függvény.
$G(V) = P(V < v) = P(Y < vX) =$
$\int_0^1 \int_0^{\min\{vx,1\}} 1dydx = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^{vx} 1dydx = \frac{v}{2} & \text{, ha } v \in (0,1] \\ \int_0^{1/v} \int_0^{vx} 1dydx + \int_{1/v}^1 \int_0^1 1dydx = 1 - \frac{1}{2v} & \text{, ha } v \in [1, \infty) \end{cases}$ az eloszlásfüggvény.

$g(v) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } v \in (-\infty, 0] \\ \frac{1}{2} & \text{, ha } v \in (0,1] \\ \frac{1}{2v^2} & \text{, ha } v \in [1, \infty) \end{cases}$ a sűrűségfüggvény.

17. Az előzőhöz hasonlóan:
$F(u) = P(U < u) = P(X < \frac{u}{Y}) = \int_0^1 \int_0^{\min\{u/y,1\}} 4xydxdy = \int_0^u \int_0^1 4xydxdy + \int_u^1 \int_0^{u/y} 4xydxdy = u^2 - u^2\ln(u)$, ha $u \in (0,1)$ az eloszlás függvény.
$f(u) = u - 2u\ln(u)$, ha $u \in (0,1)$ a sűrűség függvény.
$G(V) = P(V < v) = P(Y < vX) =$
$\int_0^1 \int_0^{\min\{vx,1\}} 4xydydx = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^{vx} 4xydydx = \frac{v^2}{2} & \text{, ha } v \in (0,1] \\ \int_0^{1/v} \int_0^{vx} 4xydydx + \int_{1/v}^1 \int_0^1 4xydydx = 1 - \frac{1}{2v^2} & \text{, ha } v \in [1, \infty). \end{cases}$ lesz az eloszlásfüggvény.

$g(v) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } v \in (-\infty, 0] \\ v & \text{, ha } v \in (0,1] \\ \frac{1}{v^3} & \text{, ha } v \in [1, \infty). \end{cases}$ a sűrűségfüggvény.

18. Az együttes sűrűségfüggvény: $h(x,y) = \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y}$, ha $0 < x, y$.
$G(V) = P(V < v) = P(Y < vX) = \int_0^\infty \int_0^{\min\{vx,\infty\}} \lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y} dydx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\mu v x})dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx - \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\mu v)x}dx = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu v}$ az eloszlásfüggvény, ha $v \in (0,\infty)$.
$g(v) = \frac{-\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2})$ a sűrűségfüggvény, ha $v \in (0,\infty)$.
$P(X < Y) = P(1 < V) = 1 - G(1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

19. a) marginális sfv-e X-nek:

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^4 \frac{xy}{63} = \frac{x}{8} & \text{ha } x \geq [0,4] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b) Számoljuk ki g(y|x) feltételes sfv-t:

$$g(y|x) = \begin{cases} \frac{h(xy)}{f(x)} = \frac{y}{8} & \text{ha } y \in [0,4], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így $g(y|3) = \frac{y}{8}$, ha $y \in [0,4]$ és 0 egyébként.
c) Konvolúció $Z = X + Y$, $y \in [0,4]$ és $x = z - y \in [0,4] \;\Rightarrow\; z \in [0,8]$ és $y \in [z, 4-z]$

$$h(z) = \int f(z-y)g(y)dy = \int_{\max\{z-4,0\}}^{\max\{z,4\}} \frac{z-y}{8}\frac{y}{8} = [\frac{zy^2}{128} - \frac{y^3}{192}]_{\max\{z-4,0\}}^{\max\{z,4\}} \begin{cases} \frac{z^3}{192} & \text{ha } z \in [0,4] \\ \frac{z^3}{384} + \frac{3z}{16} & \text{ha } z \in [4,8] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

20. $X, Y \sim Egyenletes(0,1)$, $Z := X + Y$, $y \in [0,1]$ és $x = z - y \in [0,1] \;\Rightarrow\; z \in [0,2]$, $y \in [z-1, z]$

$$h(z) = \int f(z-y)g(y)dy = \int_{\max\{z-1,0\}}^{\max\{z,1\}} 1dy = [y]_{\max\{z-4,0\}}^{\max\{z,4\}} \begin{cases} z & \text{ha } z \in [0,1] \\ 2-z & \text{ha } z \in [1,2] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

21. $X \sim Egyenletes(0,2)$, $Y \sim Egyenletes(0,3)$ $Z := X + Y$, $y \in [0,3]$ és $x = z - y \in [0,2] \;\Rightarrow\; z \in [0,5]$, $y \in [z-2, z]$

$$h(z) = \int f(z-y)g(y)dy = \int_{\max\{z-2,0\}}^{\max\{z,3\}} \frac{1}{6}dy = [\frac{y}{6}]_{\max\{z-2,0\}}^{\max\{z,3\}} \begin{cases} \frac{z}{6} & \text{ha } z \in [0,2] \\ \frac{1}{3} & \text{ha } z \in [2,3] \\ \frac{5-z}{6} & \text{ha } z \in [3,5] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

22. Ha $X, Y \sim Poi(1)$ független valószínűségi változók, akkor

$$P(X+Y=l) = \sum_{i=0}^{l} P(X=i)P(Y=l-i) = \sum_{i=0}^{l} \frac{1^i}{i!}e^{-1}\frac{1^{l-i}}{(l-i)!}e^{-1} = \frac{e^{-2}}{l!}\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i} = \frac{e^{-2}}{l!}.$$

Azaz $X + Y \sim Poi(2)$.

23. Van egy hamis érménk, ami p valószínűséggel ad fejet, akkor n dobásból a fejek száma $\sim Bin(n,p)$ eloszlást ír le, ha utána még dobunk m-szer, akkor a fejek száma a második szakaszban $\sim B(m,p)$. Megszakítás nélkül tekintve $\sim Bin(n+m,p)$ eloszlást ír le.

24. $X \sim Exp(\lambda_1), Y \sim Exp(\lambda_2)$, $Z := X + Y, y \geq 0, x = z - y \geq 0 \Rightarrow y \leq z$

$$h(z) = \int f(z-y)g(y)dy = \begin{cases} \int_0^z \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 z}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}dy = \cdots = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}] & \text{ha } z \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$Z := X - Y, y \geq 0, x = z + y \geq 0 \Rightarrow y \leq -z$

$$h(z) = \int f(z+y)g(y)dy = \int_{\min,\{0,-z\}}^{\infty} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 z}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}dy = \cdots = \begin{cases} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{\lambda_2 z} & \text{ha } z < 0 \\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda_1 z} & \text{ha } z > 0 \end{cases}$$

25. $X, Y \sim N(0,1)$, $Z := X + Y$
$h(z) = \int_{-\infty}^\infty f(z-y)g(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-y)^2+y^2}{2}}dy = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}/\sqrt{2}} e^{-\frac{(z/2-y)^2}{2/2}}dy e^{-z^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/4}$
Az integrál pont egy $N(z/2, 1/\sqrt{2})$ normális sfv teljes integrálja, azaz 1. A kapott eredmény pedig $N(0,\sqrt{2})$ normálisú. $(\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y))$