Csoportelméleti olvasó szeminárium

Franciska Petenyi

December 6, 2011

Definition

A V R-modulust **féligegyszerû**nek (semisimple) nevezzük, ha egyszerû modulusok direktösszegeként áll elõ.

Definition

A V R-modulus **talpá**nak (socle) a V egyszerû részmodulusai által generált részmodulust értjük. (soc$(V) =< M|\ M\ V$ egyszerû részmodulusa $>$).

12.5 állítás

Theorem

$\Sigma := \{M|\ M\ V$ egyszerû részmodulusa$\}$. Ha $V =< \Sigma >$ és létezik $\Delta \subseteq \Sigma$, hogy $< \Delta >= \oplus_{A \in \Delta} A$, akkor létezik, olyan Γ, hogy $\Delta \subseteq \Gamma \subseteq \Sigma$ és $V = \oplus_{B \in \Gamma} B$.

Proof.

Tekintsük $S := \{\Gamma \subseteq \Sigma|\ \Delta \subseteq \Gamma$ és $< \Gamma >= \oplus_{B \in \Gamma} B\}$ részben rendezett halmazt. Zorn lemma alkalmazható:

- $\Delta \in S \ \Rightarrow \ S = 0$
- Minden jól rendezett halmazának (C lánc) van felsõ korlátja ($\bigcup_{\Gamma \in C} \Gamma$). Felhasználjuk a következõ segédállítást: $U \neq 0$, $\exists M \leqslant U$ egyszerû.

Az S halmaz maximális elemére pont teljesülni fog, hogy $V =< \Gamma >$. $\square$

12.6 állítás

Theorem

AKÁE:

V féligegyszerû

$V = soc(V)$

V bármely részmodulusának van komplementuma V-ben.

Proof.

- $1 \Rightarrow 2$ triviális
- $2 \Rightarrow 1$ 12.5-bõl
- $3 \Rightarrow 2$ $V = Soc(V) \oplus U$, segédállítás
- $1 \Rightarrow 3$ U ellenpélda
  - $U = Soc(U) = \oplus_{A \in \Delta} A \;\Rightarrow (\oplus_{B \in \Gamma} B =) V = U \oplus \oplus_{B \in \Gamma \setminus \Delta} B$
  - $U \neq Soc(U) \;\Rightarrow U = Soc(U) \oplus (U \bigcap \oplus_{B \in \Gamma \setminus \Delta} B)$, segédállítás

$\square$

12.7 állítás

Theorem

Féligegyszerû modulus részmodulusa, és homomorf képe is féligegyszerû.

Proof.

$V = \oplus_{A \in \Gamma} A \;\Rightarrow$
$U \leqslant V: \;\; U = \oplus_{A \in \Gamma}(A \bigcap U)$, ahol $A \bigcap U = A$ vagy 0.
$\phi : V \to \dots$, akkor $\phi(V) = \oplus_{A \in \Gamma} \phi(A)$, ahol $\phi(A) = A$ vagy 0. □

12.8 állítás

Theorem

Legyen G véges csoport, U egy FG-részmodulusa V-nek, ahol $char(F) = p$. Tegyük fel, hogy U-nak van FP-moduluskén komplementuma (W) V-ben, ahol $P \in Syl_p(G)$ részcsoport. Ekkor V felhasad FG-modulusként is U felett. ($char(F) = 0) \Rightarrow P := 1$)

Proof.

- W : P-invariáns, $V = U \oplus W$ vektortérként, $\pi : V \to U$ projekció
- X : P mellékosztály reprezentáns rendszere G-ben
- $\Theta_X := \frac{1}{[G:P]}(\sum_{x \in X} x^{-1} \pi x)$ jól definiált, $\in End_F(V)$
- $\Theta_X = \Theta$ független X-től
- $\Theta \in End_{FG}(V)$
- $V = U \oplus ker(\Theta)$ FG modulusként

$\square$

12.8 állítás

Proof.

- $\Theta_X := \frac{1}{[G:P]}(\sum_{x\in X} x^{-1}\pi x) \in End_F(V)$

$$(fv)\Theta_X = \frac{\sum_{x\in X}(fvx^{-1})\pi x}{[G:P]} = f\frac{\sum_{x\in X}(vx^{-1})\pi x}{[G:P]} = f(v)\Theta_X$$

$$(v_1+v_2)\Theta_X = \frac{\sum_{x\in X}(v_1+V_2x^{-1})\pi x}{[G:P]} =$$

$$= \frac{\sum_{x\in X}(v_1x^{-1})\pi x}{[G:P]} + \frac{\sum_{x\in X}(v_2x^{-1})\pi x}{[G:P]} = (v_1)\Theta_X + (v_2)\Theta_X$$

$\square$

12.8 állítás

Proof.

- $\Theta_X = \Theta$ független X-től $p \in P$, $v \in V$ $(v = u + w)$

$$(vp)\pi = ((u+v)p)\pi = (up)\pi + (wp)\pi = up + 0$$

$$(v)\pi p = (u+v)\pi p = (u)\pi p + (w)\pi p = up + 0$$

$X = \{x_i\}_{i \in I}$ és $Y = \{y_i\}_{i \in I}$ P két mellékosztály reprezentánsa, úgy hogy $Px_i = Py_i$, azaz létezik $p_i \in P$, hogy $p_i x_i = y_i$. Ekkor

$$[G:P]\Theta_X = \sum_{x \in X} x^{-1}\pi x = \sum_{i \in I} x_i^{-1} p_i^{-1} p_i \pi x_i = \sum_{i \in I} x_i^{-1} p_i^{-1} \pi p_i x_i =$$

$$= \sum_{i \in I} y_i^{-1} \pi y_i = [G:P]\Theta_Y$$

$\square$

12.8 állítás

Proof.

- $\Theta \in End_{FG}(V)$ $g \in G$, $v \in V$:

$$[G : P](vg)\Theta = \sum_{x \in X} (vgx^{-1})\pi x =$$

$$= \sum_{x \in X} (v(xg^{-1})^{-1})\pi(xg^{-1})g = [G : P](v)\Theta g$$

- $V = U \oplus ker(\Theta)$ FG modulusként
$u\pi = u \;\; \Rightarrow u\Theta = \frac{\sum_{x \in X(ux^{-1})\pi x}}{[G:P]} = frac \sum_{x \in X(ux^{-1})x} [G : P] = u$
$Im(\Theta) = \{frac \sum_{x \in X(vx^{-1})\pi x} [G : P] | v \in V\} \subseteq U \;\; \Rightarrow$

$$Im(\Theta) = U \text{ és } \Theta^2 = \Theta$$

$$V = Im(\Theta) \oplus ker(\Theta) = U \oplus ker(\Theta)$$

□

12.9 állítás - Maschke's theorem

Theorem

Ha G véges csoport és $char(F) \nmid |G|$, akkor minden FG-modulus féligegyszerû és minden FG-bõvítés felhasadó.

Proof.

Legyen U rögzített FG-részmudulusa V-nek.
$V = U \oplus W$ vektortérként 12.8 alkalmazható ($P = 1$). Ezért FG-modulusként is van komplementuma.
Ez minden U-ra belátható, így (12.6) alapján V féligegyszerû. $\square$

12.10 állítás

Theorem

Tegyük fel, hogy G véges és $\mathrm{char}F \nmid |G|$. *Legyen* $\pi : G \to Gl(V)$ *véges dimenziós FG-reprezentáció. Ekkor*

π felbomlik irreducibilisek összegére: $\pi = \sum_{i=1}^{r} \pi_i$

Legyen $\alpha = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$ *egy másik véges dimenziós FG-reprezentáció (irreducibilis alkotói). Ekkor π ekvivalens α-val a.cs.a.* $r = s$ *és létezik* $\sigma \in S_r$, *hogy* π_i *ekvivalens* $\alpha_{i\sigma}$*-val.*

Proof.

V: FG-modulus, melyhez π reprezentációtartozik.

V felbomlik irreducibilisek összegére: $V = \oplus_{i=1}^{r} V_i$. π_i legyen V_i-khez tartozó reprezentációk.

$\Leftarrow$ $\surd$

$\Rightarrow$ fogalmazzuk át modulusokra

$\square$

12.10 állítás

Definition

Legyen V féligegyszerû R-modulus és S egyszerû R-modulus, ekkor **V S által meghatározott homogén része**: $< U : \ U \leq V, \ U \cong S >$

Definition

Egy modulust **homogén**nak nevezünk, ha izomorf egyszerû modulusok generálják.

12.11 állítás

Theorem

Legyen V féligegyszerû R-modulus, ekkor

- *ha V homogén, akkor minden egyszerû részmodulusa izomorf egymással.*
- *V direkt összege a homogén komponenseinek*

Proof.

(12.5) $V =< A|A \cong S$egyszerû R-modulus $> \Rightarrow \; V = \oplus_{A \in \Delta A}$, ahol $A \in \Delta$ izomorfak
$supp(T) := \{A \in \Delta | \; T \to A$ projekció, nem triviális$\}$, (12.4)
$T \cong A \in supp(T)$

Legyen $H(S)$ homogén része V-nek S irreducibilis modulus felett, K amaradék homogén rész által generált modulus
$H(S) + K = V$, és $H(S) \bigcap K \neq \emptyset \Rightarrow$ létezik irreducibilis (segédállítás) $T \subseteq H(S) \bigcap K$ modulus.

12.12 állítás

Theorem

$H \trianglelefteq G$ és U egyszerû FH-modulusa V FG-modulusnak, akkor

Ug egy egyszerû FH-részmodulusa V-nek ($\forall g \in G$)

Ha $g \in C_G(H)$, akkor U és Ug FH-isomorfak.

Ha X és Y FH-részmodulusok FH-isomorfak, akkor Xg és Yg-k is($\forall g \in G$-).

Proof.

$g \in G$ rögzített

- Ug F-vektortér
- Ug FH-modulus

$$Ug \sum a_h h = U \sum a_h hg = Ug$$

- $Ug \leq V$
- $Ug \geq V \;\Rightarrow U \geq Vg^{-1}$, Ug egyszerû

12.12 állítás

Proof.

$g \in C_G(H)$ rögzített, $\phi : U \to Ug, u \to ug$

- ϕ lineáris leképezés
- ϕ FH-homomorfizmus: $(uh)\phi = uhg = ugh = (u)\phi \ h$
- szürjektív, indektív $\surd$

$g \in G$ rögzített, $\phi : X \to Y$ FH-izomorfizmus, $\phi' := g^{-1}\phi g$ megmutatjuk, hogy ez $\phi' : Xg \to Yg$ FH-isomorgizmus

- ϕ' lineáris leképezés
- ϕ' FH-homomorfizmus

$$(xh)\phi' = (xhg^{-1})\phi g = (x)\phi hg^{-1}g = (x)\phi h = (xh)\phi$$

$$(x)\phi' h = (xg^{-1})\phi gh = (xg^{-1}gh)\phi = (xh)\phi$$

- szürjektív, indektív $\surd$

$\square$

12.13 állítás Clifford theorem

Theorem

Legyen V véges dimenziós irreducibilis FG-modulus, és $H \trianglelefteq G$. Ekkor

V féliegyszerû FH-modulus.

G tranzítivan hat V FH-homogén komponensein.

Legyen U V egy FH-homogén komponense.
Ekkor $N_G(U)$ irreducibilis U-n és $HC_G(H) \leq N_G(U)$.

Proof.

(12.12.1) $soc(V) = soc(V)g \;\Rightarrow soc(V)$ G-invariáns, $\Rightarrow soc(V) = V$ (12.6)

(12.12.3) $U_1 \cong U_2 \;\Leftrightarrow\; U_1g \cong U_2g$
tranzitíven hat: (12.11.2) $V \oplus H(U_i)$
indirekt, $\exists i, j$: $H(U_i)G \not\supseteq H(U_j) \;\Rightarrow < H(U_i) > \neq V$ FG-részmodulus

(12.12.2) $HC_G(H)$ a homogén komponenseken hat
$(HC_G(H) \rightarrow GL(H(U)),\; H(U)HC_G(H) \subseteq H(U))$

$\pi : G \to GL(V)$ kiterjeszthetjük $\pi : F[G] \to GL(V)$-re, úgy hogy $(v)(\sum a_g g)\pi := \sum a_g (v)(g\pi)$. Ekkor π egy F-algebra homomorfizmus $F[G]$ és $End_F(V)$ között.

Definition

Azt mondjuk V **hû** R-modulus, ha π injekció $F[G]$-rõl.

Definition

$F[G]$ G által generált F-algebra, $F[G]\pi$ egy részalgebra $End_F(V)$-ben, melyet $G\pi$ generál, ezt π **burkoló algebrájának** (enveloping algebra) nevezzük.

12.14 állítás

Theorem

$End_R(V) = C_{End_F(V)}(R\pi) = C_{End_F(V)(G\pi)}$

Proof.

- $\phi \in End_R(V) \;\Rightarrow \phi \in C_{End_F(V)}(R\pi)$:

$$((v)(\sum a_g g\pi))\phi = ((v)(\sum a_g g))\phi = (v)\phi(\sum a_g g\pi)$$

- $\phi \in C_{End_F(V)}(R\pi) \;\Rightarrow \phi \in C_{End_F(V)}(G\pi)$
- $\phi \in C_{End_F(V)}(G\pi) \;\Rightarrow \phi \in End_R(V)$

$$(v\sum a_g g)\phi = (\sum(a_g vg))\psi = \sum a_g(vg)\phi = \sum a_g(v)\phi g$$

$\square$

12.15 állítás

Theorem

Ha G véges és π irreducibilis, akkor $Z(G\pi)$ ciklikus.

Proof.

π irreducibilis $\Rightarrow$ $End_R(V) =: D$ ferdetest.

(12.14.) $Z \subseteq C_{End_F(V)}(G\pi) = D$

$D = C_{End_F(V)}(G\pi) \subseteq C_{End_F(V)}(Z(G\pi)) = C_{End_F(V)}(Z) \Rightarrow Z \subseteq Z(D)$

Jelöljük K-val Z által generál rész-ferde-testet. K test.

Z (csoport) véges részcsoportja K multiplikatív csoportjának. $\square$

12.16 éa 12.17. állítás

Theorem

Legyen $\pi : G \to GL(V)$ *egy irreducibilis véges dimenziós FG-reprezentiáció. Ekkor* $R\pi$ *izomorf az* $M_m[D]$ *mátrixok gyûrûjével, mint F-algebra, ahol* $D = End_{FG}(V)$, $m = dim_D(V)$. *Továbbá* $Z(D) = F$.

Theorem

Tegyük fel, hogy F algebrailag zárt és $\pi : G \to GL(V)$ *egy irreducibilis véges dimenziós FG-reprezentáció. Ekkor* $End_F(V) = R\pi$ *és* $F = End_{FG}(V)$.

Köszönöm a figyelmet!